CORE
Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
Provided by Qucosa - Publikationsserver der Universität Leipzig

Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik

Marktgleichgewichte bei Risikobewertung durch individuelle Abweichungsmaße

Diplomarbeit
zur Erlangung des Grades eines
Diplom-Wirtschaftsmathematikers

vorgelegt von

Marcel Marohn

geboren am 18.07.1990 in Leipzig

Eingereicht am: 13.04.2015

Betreuerin: Frau PD Dr. Anita Kripfganz

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Diese Arbeit geht aus dem Artikel "Equilibrium with Investors using a Diversity of Deviation Measures" von R. T. Rockafellar et al. aus dem Jahr 2013 hervor. Ziel war es, diesen genau nachzuvollziehen und die Beweise detailliert auszuarbeiten. Dabei sollte insbesondere auch ein Bezug zur Spieltheorie und den dort verwendeten Gleichgewichtsbegriffen hergestellt werden.

In dieser Diplomarbeit werden wir einen Finanzmarkt mit endlich vielen riskanten Assets sowie einer sicheren Anlage betrachten und die Frage der Existenz eines Marktgleichgewichts klären. Die Preise der Assets werden dabei eine entscheidende Rolle spielen. Das Besondere ist hierbei, dass nicht wie bei früheren Untersuchungen, zum Beispiel von Nielsen "Existence of Equilibrium in CAPM" (1990), alle Investoren das Risiko der Wertpapiere gleich bewerten müssen. Außerdem werden wir Abweichungsmaße statt Risikomaße zur Risikobewertung verwenden. Dazu müssen wir uns verständlicherweise erst der Verbindung dieser beiden Begrifflichkeiten zuwenden.

Um den Aufbau dieser Arbeit und unser Vorgehen zu verdeutlichen, verweisen wir an dieser Stelle zunächst auf die benötigten Grundlagen aus der Optimierung, Wahrscheinlichkeitstheorie, Spieltheorie und Finanzmathematik, die im Anhang A bereitgestellt werden. Als Vorbereitung für Gleichgewichtsbestimmungen untersuchen wir nach einer kompakten Ausführung über Abweichungs- und Risikomaße, welchen Optimierungsaufgaben sich ein einzelner Investor widmen kann und wie es um die Lösungen dieser bestimmt ist. Dabei werden wir Nutzenfunktionen begegnen, mit denen die Investoren die Attraktivität einer Portfoliowahl bewerten können. Alle formulierten Annahmen, Optimierungsprobleme und Symbole finden sich im Anhang wieder und können dort jederzeit nachgeschlagen werden.

Neben eigenen Grafiken wurde zur Verdeutlichung der gewonnenen Kenntnisse ein *Standardbeispiel* konstruiert, was sich durch die gesamte Arbeit hindurch ziehen wird. Wir werden uns dann auf die nachfolgend beschriebene Situation beziehen.

Beispiel 1.1 (Standardbeispiel)
Wir betrachten einen Markt in zwei Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$. Im Zeitpunkt $t = 0$ findet der Handel statt, in Zeitpunkte $t = 1$ die Auszahlung. Letztere hängt vom eingetretenen Zustand $\omega \in \Omega$ ab. Dafür wird ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zugrundegelegt, wobei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ gelte. Der Markt bestehe aus zwei Assets $j = 0$ und $j = 1$.

- *Das Asset $j = 0$ sei sicher, das heißt es hat eine in $t = 1$ konstante Auszahlung, egal welcher Zustand ω eintritt.*
- *Das Asset $j = 1$ dagegen sei riskant, das heißt dessen Auszahlung in $t = 1$ hängt explizit vom eingetretenen Zustand ω ab.*

Für die Zustände ω_i und Auszahlungen $W_j = W_j(\omega_i)$ mit $i \in \{1, 2\}$ und $j \in \{0, 1\}$ gelte

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \frac{1}{2} \qquad W_0(\omega_1) = W_0(\omega_2) = 1$$
$$W_1(\omega_1) = 0 \qquad W_1(\omega_2) = 4.$$

Zunächst gehen wir auf unserem Markt von folgenden Preisen s_j für die Assets $j = 0, 1$ aus:

$$s_0 = 1 \qquad s_1 = 1.$$

Der Markt kann also durch das Paar (D, S) beschrieben werden mit Auszahlungsmatrix D und Preisvektor S, die gegeben sind durch

$$D = \begin{pmatrix} W_0(\omega_1) & W_1(\omega_1) \\ W_0(\omega_2) & W_1(\omega_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad S = (s_0, s_1) = (1, 1).$$

Als (theoretisch) sicheres Asset kann $j = 0$ beispielsweise eine Staatsanleihe (*Bond*) sein [4] und als riskantes Asset kann $j = 1$ eine Aktie sein. Dann beschreibt für $j = 1$ der Zustand ω_2 gerade eine Aufwärtsbewegung (*up*) und ω_1 eine Abwärtsbewegung (*down*) des Aktienkurses. An diesem Beispiel werden wir verschiedene Optimierungsprobleme bezüglich der Portfoliobildung von Investoren lösen und zeigen, dass sich auf dem Markt unter diesem Preisvektor S und diesen Assets eine Gleichgewichtssituation einstellen kann.

2. Modelle für einen Investor

In diesem Kapitel führen wir zunächst Abweichungsmaße als Werkzeuge zur Risikobewertung von Portfolios ein. Wir werden daraufhin den für unsere Untersuchungen relevanten Markt und seine Assets genauer betrachten und erste Annahmen treffen, die bis zum Ende der Arbeit Gültigkeit haben werden. Bevor wir uns Gleichgewichtsuntersuchungen widmen, erschien es angebracht zunächst nur einen Investor zu betrachten. Daher werden wir in diesem Kapitel nach Betrachtungen über den Markt Optimierungsprobleme für einen einzelnen Investor lösen und das Zusammenspiel auf Kapitel 3 verlagern. Als erstes schauen wir uns unter Vorgabe einer Risikoprämie die Abweichungsminimierung an. Danach führen wir Nutzenfunktionen für zwei Variablen ein und ermitteln, wie die optimale Portfoliowahl aussieht, wenn sowohl Risiko als auch bedingte Auszahlung zur Bewertung von Portfolios herangezogen werden.

2.1. Abweichungsmaße

Mit einem Asset oder einem Portfolio geht eine in der Regel risikobehaftete bedingte Auszahlung einher, die durch eine Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ beschrieben wird. $X(\omega)$ ist dann die Auszahlung im Zustand $\omega \in \Omega$. Investoren wollen hohe Rückflüsse im Bezug zu den aktuellen Preisen der Assets erzielen. Dabei spielt aber auch das durch die zufallsbehafteten Auszahlungen entstehende Risiko eine Rolle. Zur Erfassung dessen führen wir nun Abweichungsmaße ein und stellen den Bezug zu den üblicherweise dafür verwendeten Risikomaßen her. Dabei orientieren wir uns an [12] und [13]. Dort finden sich auch die Beispiele sowie Beweise zu behaupteten Eigenschaften dieser Beispiele wieder. Wir verzichten hingegen hier auf einen detaillierten Nachweis, da diese Beispiele für die restliche Arbeit keine weitere Bedeutung haben.

Motiviert wird der Begriff des Abweichungsmaßes durch die Standardabweichung σ, die die Streuung einer Zufallsvariable um Ihren Erwartungswert beschreibt. Weicht eine Zufallsvariable X mit positiver Wahrscheinlichkeit von ihrem Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ ab, so ist $\sigma(X) > 0$. Andernfalls ist $\sigma(X) = 0$. Betrachtet man λX, dann hat diese eine Streuung von $\lambda\sigma(X)$. Außerdem gilt für die Streuung von $X_1 + X_2$, dass $\sigma(X_1 + X_2) \leq \sigma(X_1) + \sigma(X_2)$ gilt. Die Streuung $\sigma(X)$ hängt des weiteren auch nicht von den eigentlichen Realisationen der Zufallsvariable X ab, sondern von der Differenz $X - \mathbb{E}(X)$. Daher ist $\sigma(X + C) = \sigma(X)$ für $C \in \mathbb{R}$.

Diese Motivation führt auf folgende Begriffsbildung, vergleiche etwa [12]:

Definition 2.1 *Die Abbildung $\mathfrak{D} : \mathfrak{L}^2(\Omega) \to [0, \infty]$ heißt Abweichungsmaß, falls gilt:*

(D1) $\mathfrak{D}(X) = 0$ *für* $X = \mathit{konst.}$, $\mathfrak{D}(X) > 0$ *sonst,*

(D2) $\mathfrak{D}(\lambda X) = \lambda\mathfrak{D}(X)$ *für* $X \in \mathfrak{L}^2(\Omega), \lambda \geq 0$ *(positive Homogenität),*

(D3) $\mathfrak{D}(X_1 + X_2) \leq \mathfrak{D}(X_1) + \mathfrak{D}(X_2)$ *für* $X_1, X_2 \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ *(Dreiecksungleichung),*

(D4) $\mathfrak{D}(X + C) = \mathfrak{D}(X)$ *für* $X \in \mathfrak{L}^2(\Omega), C \in \mathbb{R}$ *(Translationsinvarianz).*

Man erkennt die motivierenden Eigenschaften von σ wieder. Damit ist σ ein Abweichungsmaß. Es lässt sich auch $\sigma > 0$, falls $X \neq \mathbb{E}(X)$ fast sicher gilt, mit der Definition wie folgt begründen:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 0) > 0 \Longrightarrow X \neq \mathit{konst.} \overset{(D1)}{\Longrightarrow} \mathfrak{D}(X) > 0.$$

Bemerkung 2.2 *Aus (D2) und (D3) folgt die Konvexität des Abweichungsmaßes: für alle $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ gilt*

$$\mathfrak{D}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) \leq \lambda_1\mathfrak{D}(X_1) + \lambda_2\mathfrak{D}(X_2).$$

Weiterhin gilt nach (D4) für jedes $X \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$:

$$\mathfrak{D}(X) = \mathfrak{D}(X - \mathbb{E}(X)).$$

Durch die Standardabweichung σ wird auch folgender Begriff motiviert:

Definition 2.3 *Ein Abweichungsmaß $\mathfrak{D}$ heißt symmetrisch, falls für alle $X \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ gilt:*

$$\mathfrak{D}(-X) = \mathfrak{D}(X).$$

Nun halten wir einige Beispiele für Abweichungsmaße fest, entnommen aus [12].

Beispiel 2.4 *Die Standardabweichung*

$$\mathfrak{D}(X) = \sigma(X) = \|X - \mathbb{E}(X)\| \textit{ für } X \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$$

ist ein symmetrisches Abweichungsmaß, d.h. $\mathfrak{D}(-X) = \mathfrak{D}(X)$. Die obere bzw. untere Semiabweichung $\mathfrak{D}(X) = \sigma_+(X)$ bzw. $\mathfrak{D}(X) = \sigma_-(X)$, die gegeben sind durch

$$\sigma_+(X) = \|[X - \mathbb{E}(X)]_+\| \textit{ bzw. } \sigma_-(X) = \|[X - \mathbb{E}(X)]_-\|,$$

sind nicht symmetrisch, jedoch alle drei stetig und endlich, d.h. es gilt $\mathfrak{D}(X) < \infty$ für alle $X \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$.

Beispiel 2.5 *Die bildweitenbasierende Abweichung (range-based deviation) ist ein unterhalbstetiges Abweichungsmaß und definiert durch*

$$\mathfrak{D}(X) = \mathbb{E}(X) - \inf X = \sup\,[\mathbb{E}(X) - X].$$

und gibt eine Größe für die untere Bildweite an. Die Spiegelung $\tilde{\mathfrak{D}}(X)$ ist ebenfalls ein unterhalbstetiges Abweichungsmaß und dann gegeben durch

$$\tilde{\mathfrak{D}}(X) = \sup X - \mathbb{E}(X) = \sup\,[X - \mathbb{E}(X)].$$

Sie gibt eine Größe für die obere Bildweite an. In ihrer Summe ergeben sie die gesamte Bildweite von X, nämlich

$$\mathfrak{D}(X) + \tilde{\mathfrak{D}}(X) = \sup X - \inf X.$$

In der Finanzmathematik sind eher sogenannte Risikomaße gebräuchlich. Wir wollen das Risiko aber mit Hilfe des oben eingeführten Abweichungsmaßbegriffs bestimmen. Wir müssen daher als nächstes einen Bezug zwischen diesen beiden Begriffen herstellen. Als Motivation dient folgendes Beispiel der Portfoliobildung:

Beispiel 2.6 *Das Hinzufügen einer sicheren Anlage mit der Auszahlung $C \in \mathbb{R}$ zum Portfolio verringert das Risiko, nämlich den potentiellen Verlust, um eben diesen Betrag. Analog lässt sich dies im Falle einer sicheren Schuld als Vergrößerung des potentiellen Verlustes interpretieren.*
Ein Portfolio, das in allen Zuständen λ-fache Gewinne bzw. Verluste eines Portfolios x ausschüttet, hat auch das $\lambda-$fache Risiko des Portfolios x.
Die Vielfältigkeit (Diversifikation) von Portfolios im Sinne ihrer Zusammensetzungen aus verschiedenen Finanzinstrumenten hat eine positive Wirkung: im schlimmsten Fall addieren sich die Risiken der einzelnen Instrumente, im besten Fall heben sie sich auf und das Finanzgeschäft wird risikofrei.
Ein Portfolio x kann außerdem kein höheres Risiko besitzen als das Portfolio x', falls x in jedem Zustand eine mindestens gleich hohe Auszahlung liefert wie x'.

Das führt auf folgende Definition, vergleiche etwa [13]:

Definition 2.7 *Unter einem kohärenten Risikomaß versteht man ein Funktional $\mathfrak{R} : \mathfrak{L}^2(\Omega) \to (-\infty, \infty]$ mit den Eigenschaften:*

(R1) $\mathfrak{R}(X + C) = \mathfrak{R}(X) - C$ *für alle* $X \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ *und alle* $C \in \mathbb{R}$,

(R2) $\mathfrak{R}(0) = 0$ *und* $\mathfrak{R}(\lambda X) = \lambda\mathfrak{R}(X)$ *für alle* $X \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ *und alle* $\lambda > 0$,

(R3) $\mathfrak{R}(X + X') \leq \mathfrak{R}(X) + \mathfrak{R}(X')$ *für alle* $X, X' \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$,

(R4) $\mathfrak{R}(X) \leq \mathfrak{R}(X')$, *falls* $X \geq X'$ *für* $X, X' \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ *gilt.*

Abschließend wollen wir noch anmerken, dass der Begriff "Risikomaß" abgeschwächter erfasst werden kann. Ein Risikomaß muss nicht unbedingt (R2) und (R3) erfüllen. Wir sprechen dann bereits im Falle der Erfüllung von wenigstens (R1) und (R4) von einem (monetären) Risikomaß, vergleiche dazu auch [13]. Für unsere Betrachtungen benötigen wir aber obige Definition und kohärente Risikomaße.

Wie bei Abweichungsmaßen implizieren die positive Homogenität (R2) und die Subadditivität (R3) die Konvexität des Risikomaßes. Außerdem sind koheränte Risikomaße eigentliche Funktionen, da $\mathfrak{R}(X) > -\infty$ für alle $X \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ gilt und es gibt ein $X^0 \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ mit $\mathfrak{R}(X^0) < +\infty$, nämlich $X^0 = 0$.

Abweichungs- und Risikomaße müssen noch folgende zusätzliche Eigenschaften aufweisen, um einen Bezug zueinander herstellen zu können:

Definition 2.8

(i) *Erfüllt ein Abweichungsmaß $\mathfrak{D}$ zusätzlich die Bedingung*

$$\text{(D5)} \quad \mathfrak{D}(\mathrm{X}) \leq \mathbb{E}(\mathrm{X}) - \inf \mathrm{X},$$

so heißt es unterhalb dominiert.

(ii) *Ein koheräntes Risikomaß, das zusätzlich die Bedingung*

$$\text{(R5)} \qquad \mathfrak{R}(\mathrm{X}) > \mathbb{E}(-\mathrm{X})$$

für nicht-konstante X erfüllt, heißt streng erwartungsbegrenzt.

Motiviert werden diese Begriffe durch eine am ehesten den von tatsächlichen Anlegern entsprechenden Ansicht:

Beispiel 2.9 *(R5) beinhaltet, dass potentielle Verluste, also Abweichungen einer Auszahlung X unterhalb des Erwartungswertes, schwerer wiegen sollen, als jene nach oben, nämlich die Gewinne.*

Im Folgenden ein Beispiel eines Risikomaßes, dass diese Ansicht nicht zugrunde legen würde, vergleiche auch [3].

Beispiel 2.10 (Negativer Erwartungswert)

$$\mathfrak{R}(X) = \mathbb{E}(-X) \text{ für } X \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$$

ist ein koheräntes Risikomaß und erfüllt die Bedingung (R2) der Homogenität sogar für negative λ. Es ist nicht streng erwartungsbegrenzt: Gewinne und Verluste werden gleich gewichtet.

Wir stellen nun den angekündigten Bezug zwischen Risiko- und Abweichungsmaßen her.

Theorem 2.11 *Ein unterhalb dominiertes Abweichungsmaß $\mathfrak{D}$ korrespondiert eins-zu-eins zu einem streng erwartungsbegrenzten, kohärenten Risikomaß $\mathfrak{R}$. Diese Verbindung ist dann gegeben durch*

$$\mathfrak{D}(X) = \mathfrak{R}(X - \mathbb{E}(X)).$$

bzw.

$$\mathfrak{R}(X) = \mathbb{E}(-X) + \mathfrak{D}(X).$$

Ein Beweis findet sich in [13] zu Theorem 2. Da die Standardabweichung obige Zusatzeigenschaft nicht erfüllt, gibt es kein zugehöriges kohärentes Risikomaß. Ein anderes Beispiel für ein Risikomaß, das nicht streng erwartungsbegrenzt ist und damit kein zugehöriges Abweichungsmaß im Sinne des letzten Theorems besitzt, ist der Value-at-Risk, siehe [13]. Dieser ist ein Standardrisikomaß für den Finanzbereich.

Beispiel 2.12 (Value-at-Risk) *Das monetäre Risikomaß*

$$VaR_\alpha(X) = -\inf\{c | P(X \leq c) > \alpha\}$$

für $\alpha \in (0,1)$ *heißt Value-at-Risk von* X *zum Niveau* α. *Dieses erfüllt nicht (R3) und (R5), ist also nicht strenge erwartungsbegrenzt und nicht einmal ein kohärentes Risikomaß. Es gibt kein korrespondierendes Abweichungsmaß.*

Das folgende abschließende Beispiel, was eine Abweichungsmaß-Risikomaß-Beziehung gemäß des obigen Theorems gestattet, stammt aus [13, Example 3]. Dort werden auch deren Eigenschaften nachgewiesen.

Beispiel 2.13 (Conditional Value-at-Risk)

$$CVaR_\alpha(X) = -\mathbb{E}(X | X \leq -VaR_\alpha(X)).$$

ist ein streng erwartungsbegrenztes, kohärentes Risikomaß. Die nach dem letzten Theorem gegebene Risikomaß-Abweichungsmaß-Beziehung ist gegeben durch

$$\mathfrak{R}(X) = CVaR_\alpha(X) \qquad \mathfrak{D}(X) = CVaR_\alpha(X - \mathbb{E}(X)),$$

wobei $\mathfrak{D}$ *stetig und unterhalb dominiert ist.*

Um unter anderen diesen Bezug zu Risikomaßen zu erhalten, wollen wir gemäß Rockafellar et al. [11] in dieser Arbeit folgende zusammenfassende Annahmen an die betrachteten Abweichungsmaße $\mathfrak{D}$ machen.

Annahme 2.14 *Alle Abweichungsmaße* $\mathfrak{D}$ *sind unterhalbstetig und unterhalb dominiert.*

Alle im Verlauf der Arbeit gemachten Annahmen finden sich als Übersicht zum Nachschlagen im Anhang wieder.

2.2. Risikominimierung

In diesem Abschnitt werden wir uns einem ersten Optimierungsproblem bei der Portfoliowahl widmen. Dazu müssen wir zunächst den Markt spezifizieren, auf dem wir Rockafellar et al. [11] folgend agieren. Auf diesem gebe es $n+1$ Assets, die mit $j = 0, 1 \ldots, n$ bezeichnet werden und die jeweils eine durch eine Zufallsvariable beschriebene Rendite $R_j \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ besitzen, die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert sind. Dabei ist $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$. Das Asset $j = 0$ sei als einziges risikolos, das heißt es gelte $R_0 = konst.$ und $R_j \neq konst.$ für $j \neq 0$. Der auf dieser Situation betrachtete arbitragefreie Markt sei gegeben durch das Tupel (D, S) mit Auszahlungsmatrix $D \in \mathbb{R}^{K \times (n+1)}$ und Preisvektor $S = (1, s_1, ..., s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $s_j > 0, j \in \{1, ..., n\}$. Die Auszahlungsmatrix D wird dabei vollkommen durch die Renditen R_j und Preise s_j beschrieben, sodass die konkrete Natur der Auszahlungsmatrix in den weiteren Betrachtungen vernachlässigt wird und wir statt von (D, S) einfach von einem Markt mit Preisvektor S sprechen. Bei den Preisen handelt es sich um *relative Preise*, wobei das Asset $j = 0$ als *numéraire* angenommen wird, vergleiche dazu auch Mossin [10]. Die bisher beschriebene Situation bleibt in der gesamten Arbeit identisch. Nur in Kapitel 3 zu Gleichgewichtsbetrachtungen werden wir dies in so fern abändern, dass der Preisvektor S nicht mehr gegeben und insbesondere als nichtnegativ angenommen wird, sondern für Gleichgewichtssituationen bestimmt werden soll. Doch dazu an geeigneter Stelle später mehr.

Wir bezeichnen mit $(x_0, x_1, ..., x_n) = (x_0, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ das gemischte Portfolio eines Investors. Dabei ist x_j die in das Asset $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ investierte Geldmenge. Im Gegensatz zum zugrunde liegenden Papers von Rockafellar et al. [11] stecken in den x_j noch keine Preise drin, sondern sie beschreiben Anteile. x beschreibt den riskanten Anteil des gemischten Portfolios. Wir werden sehen, dass es genügt sich bei den Untersuchungen auf den riskanten Anteil x zu beziehen, da sich x_0 dann von allein ergibt. Daher sprechen wir einfach von dem Portfolio x und betonen mit (x_0, x), falls wir von dem gemischten Portfolio sprechen wollen. Das gemischte Portfolio (x_0, x) besitzt eine bedingte Auszahlung W. Es sei $\mathfrak{D}$ ein Abweichungsmaß. Wir ordnen dann dem gemischten Portfolio (x_0, x) die Abweichung

$$\mathfrak{D}(W) = \mathfrak{D}\left(x_0(1 + R_0) + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j (1 + R_j)\right) = \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} s_j x_j R_j\right)$$

zu. Die Abweichung hängt also nur von dem Portfolio x ab.

Annahme 2.15 *Wir nehmen für die gesamte Arbeit an, dass*

$$\mathfrak{D}(R_j) < \infty \text{ und } \mathfrak{D}(-R_j) < \infty$$

gilt.

Damit können wir sicherstellen, dass auch wegen (D2) und (D3)

$$\mathfrak{D}\left(x_0(1+R_0) + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j R_j\right) \leq \sum_{j=0}^{n} s_j \cdot |x_j| \cdot \mathfrak{D}(sgn(x_j) \cdot R_j) < \infty$$

ist, wobei *sgn* die Signum- oder Vorzeichenfunktion ist.

In dieser Situation kann sich der Investor nun dem folgenden, ersten Optimierungsproblem zuwenden: er möchte ein gemischtes Portfolio bestimmen, welches das durch sein gewähltes Abweichungsmaß $\mathfrak{D}$ gemessene Risiko unter den erwarteten Rückflüssen minimiert. Wir gehen dabei von einer zusätzlichen Budgetbeschränkung vor, indem genau eine Kapitalanlageeinheit investiert werden soll, das heißt der Preis des Portfolios soll 1 betragen. Dies wird durch die Nebenbedingung

$$x_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j = 1$$

beschrieben. Der zufällige Gewinn des gemischten Portfolios (x_0, x) ist gleich

$$G = x_0 R_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j R_j.$$

Für das Inkaufnehmen des Risikos durch die Investition in die riskanten Assets, erhofft sich ein Investor einen individuellen Bonus. Dieser werde durch einen Parameter $\Delta \in \mathbb{R}$ beschrieben, der der Bedingung

$$\Delta \leq \mathbb{E}(G) - R_0$$

genügt. Er beschreibt eine Art Risikoprämie und steht für die geforderte zusätzliche Geldmenge, die über demjenigen Gewinn liegt, der einer vollständigen Investition der einen Kapitalanlageeinheit in das sichere Asset mit der risikofreien Rate R_0 entspricht. Wir benutzen hierbei "Gewinn" in dem Sinne, dass Verlust negativer

Gewinn ist.

Das führt auf das folgende Optimierungsproblem bei der Auswahl von (x_0, x):

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}\left(x_0 R_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j R_j\right) &\to \min!\\ x_0 R_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j \mathbb{E}(R_j) &\geq R_0 + \Delta,\\ x_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j &= 1,\\ x_j &\geq 0 \quad \forall j = 1, ..., n.\end{aligned}$$

Die erste Bedingung fordert, dass die Investitionseinheit einen erwarteten Gewinn von mindestens $R_0 + \Delta$ erbringen soll. Es wird sich zeigen, dass die Ungleichung für $\Delta > 0$ bei einer Lösung des Problems mit Gleichheit erfüllt sein muss. Wir können zur Vereinfachung x_0 und damit das sichere Asset durch Umstellen der Budgetrestriktion eliminieren sowie in der Zielfunktion (D4) ausnutzen. Daher widmen wir uns dem äquivalenten Problem

$$P(\Delta) : \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} s_j x_j R_j\right) \to \min!$$

$$B_{P(\Delta)} \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} s_j x_j (\mathbb{E}(R_j) - R_0) \geq \Delta, \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, ..., n. \end{cases}$$

Man beachte, dass $B_{P(\Delta)} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist und sich das Problem, wie angedeutet, auf die Bestimmung von dem Portfolio x beschränkt. x_0 ergibt sich in allen unseren Untersuchungen aus der Budgetbeschränkung. Weiterhin werden für die sich daraus ergebenden gemischten Portfolios (x_0, x) mit $x \in B_{P(\Delta)}$ keinerlei Vorzeichenrestriktionen für x_0 gefordert. Damit ist eine Schuldenaufnahme in dieser Größe durch sogenannte *Leerverkäufe* möglich. Jedoch schließen wir in $P(\Delta)$ solche Positionen in risikobehafteten Assets aus.

In dieser Arbeit verstehen wir unter $x \geq y$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ die komponentenweise Halbordnung im $\mathbb{R}^n$, also gilt $x \geq y$ genau dann, wenn $x_j \geq y_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$

gilt. Analog verstehen wir $x > y$ komponentenweise. Daher schreiben wir $x \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}^n$, wenn $x_j \geq 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt, das heißt in diesem Kontext steht 0 für den Nullvektor.

Mit Hilfe des Problems $P(\Delta)$ können wir den Markt weiter spezifizieren und untersuchen. Dafür legen wir folgende Bezeichnung fest:

Definition 2.16

(i) *Ein Asset $k \in \{0, 1, ..., n\}$ heißt redundant, falls $\alpha_j \in \mathbb{R}$ mit $j \in \{0, 1, \ldots, n\} \backslash k$ nicht identisch Null existieren mit*

$$(1 + R_k) = \sum_{j \in \{0,1,\ldots,n\} \backslash k} \alpha_j (1 + R_j).$$

(ii) *Ein Asset $k \in \{1, ..., n\}$ heißt irrelevant für den Markt unter einem Investor, falls für jede Lösung $x^* \neq 0$ von $P(\Delta)$ gilt: $x_k^* = 0$.*

Die Definition von (ii) wird in Kapitel 3 auf mehrere Investoren erweitert. Daher wählen wir in der Definition den Zusatz *unter einem Investor*, werden aber im Folgenden einfach von *irrelevant* sprechen. Damit machen wir nun folgende Annahmen an unsere riskanten Assets $j = 1, \ldots, n$, die bis zum Ende der Arbeit gelten:

Annahme 2.17 (Risikobehaftete Assets)
Wir gehen für die riskanten Assets $j = 1, \ldots, n$ von folgenden Annahmen aus:

(A1) *Die erwarteten Renditen $\mathbb{E}(R_j)$ für die risikobehafteten Assets j sind nicht identisch und es gilt $\mathbb{E}(R_j) > R_0$ für alle $j = 1, ..., n$.*

(A2) *Aus der Beziehung*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (1 + R_j) = C \text{ mit } \alpha_j \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$$

folgt stets $\alpha_j = 0$ für alle $j = 1, ..., n$ und damit $C = 0$.

(A3) *Keines der riskanten Assets ist irrelevant für den Markt.*

Die Relevanzannahme (A3) läuft lediglich darauf hinaus, dass ein Asset aus den Betrachtungen herausgelassen wird, falls in keiner Optimallösung von $P(\Delta)$ in dieses Asset investiert wird.

Nun wollen wir einige aus dem Marktmodell resultierende Eigenschaften festhalten. Dabei orientieren wir uns an einer früheren Arbeit von Rockafellar et al. [14, Proposition 1 - 3].

Lemma 2.18 (Beseitigung von Redundanz) *Es gibt genau dann ein risikofreies gemischtes Portfolio* $(x_0, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *mit* $x \neq 0$*, wenn ein Asset* $j \in \{1, ..., n\}$ *des Modells redundant ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$): Angenommen, ein gemischtes Portfolio (x_0, x) mit $x \neq 0$ ist risikofrei, das heißt seine zukünftige bedingte Auszahlung $W \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ ist konstant. Sei o.B.d.A. $W \equiv 0$, also

$$0 \equiv W = x_0(1 + R_0) + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j (1 + R_j).$$

Dann ist wegen $s_j > 0$ für alle j und $x \neq 0$ einer der Koeffizienten $s_j x_j$ mit $j \in \{1, ..., n\}$ verschieden von Null, etwa $s_1 x_1$. Dann erhalten wir für $x'_j = -\frac{x_j}{s_1 x_1}$ mit $j \in \{0, 2, ..., n\}$ daraus

$$(1 + R_1) = x'_0(1 + R_0) + \sum_{j=2}^{n} s_j x'_j (1 + R_j).$$

Dabei sind die $s_j x'_j = -\frac{s_j x_j}{s_1 x_1}$ für $j \in \{2, \dots, n\}$ nicht identisch Null, da $x \neq 0$ gilt. Aus $\alpha_j := s_j x'_j$ für $j \in \{2, ..., n\}$ und $\alpha_0 := x_0$ folgt, dass das Asset $j = 1$ redundant ist.

($\Leftarrow$): Sei das Asset $j = 1$ redundant. Dann existieren Zahlen $\alpha_0, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ nicht identisch Null, sodass

$$(1 + R_1) = \sum_{j \in \{0,2,...,n\}} \alpha_j (1 + R_j)$$

gilt. Dann ist

$$\alpha_0(1 + R_0) - (1 + R_1) + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j (1 + R_j) = 0.$$

Dann setzen wir für $S = (1, s_1, ..., s_n) > 0$

$$x_0 := \alpha_0, \qquad s_1 x_1 := -1 \quad \text{und} \quad s_j x_j := \alpha_j \text{ bzw. } x_j := \frac{\alpha_j}{s_j},\ j = 2, ..., n.$$

Zusammen mit $x_1 = -\frac{1}{s_1}$ ist das gemischte Portfolio $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n) =: (x_0, x)$ mit $x \neq 0$ risikofrei. □

Wir können also die redundanten Assets eines nach dem anderen aus dem Modell entfernen bis schließlich keine Redundanz mehr vorliegt. Dann ist (A2) erfüllt. Wir können daher (A2) auch durch die folgende Annahme ersetzen:

(A2'): Kein gemischtes Portfolio (x_0, x) mit $x \neq 0$ ist risikofrei.

Eine hinreichende Bedingung für die Risikofreiheit lässt sich mit Hilfe der Verteilungsfunktion der Renditen wie folgt formulieren.

Lemma 2.19 (Stetige Verteilungen)
Die Annahme (A2') *ist erfüllt, falls* $R = (R_1, \ldots, R_n)$ *eine stetige Verteilung besitzt.*

Beweis. Besitzen $R_1, ..., R_n \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ stetige Verteilungen, dann hat auch die Zufallsvariable

$$\overline{W} := \sum_{j=1}^{n} s_j x_j (1 + R_j) \text{ mit } x_j \in \mathbb{R}$$

eine stetige Verteilung. Das schließt aber $\overline{W} = konst.$ aus. □

Das folgende Lemma zeigt, dass unser Markt (D, S) vollständig ist.

Lemma 2.20 (Vielfalt der Preis-Gewinn-Kombinationen) *Unter den Annahmen* (A1), (A2), (A3) *existiert für jede Wahl von* $(p, \xi) \in \mathbb{R}^2$ *ein Portfolio* (x_0, x) *mit dem Preis* $p = x_0 + \sum_{j=1}^n s_j x_j$ *und erwartetem Gewinn* $x_0 R_0 + \sum_{j=1}^n s_j x_j \mathbb{E}(R_j) = \xi$.

Beweis nach [14]. Die Menge der Paare (p, ξ) bildet einen Unterraum des $\mathbb{R}^2$. Wäre dies ein echter Unterraum des $\mathbb{R}^2$, so wären die Paare kollinear, lägen also auf einer Geraden. Betrachten wir jedoch die Abbildung

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & s_1 & ... & s_n \\ R_0 & \mathbb{E}(R_1) & ... & \mathbb{E}(R_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ \xi \end{pmatrix},$$

so ist wegen (A1) $\operatorname{rank}(A) = 2$, also $\dim \operatorname{Im}(A) = 2$. Damit ist der Markt (D, S) vollständig. $\square$

Wir kehren zum Problem $P(\Delta)$ zurück. Wie oben bezeichnen wir im Folgenden mit

$$\overline{W} = \sum_{j=1}^{n} s_j x_j (1 + R_j) \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$$

die bedingte Auszahlung des Portfolios x. Manchmal schreiben wir genauer $\overline{W}(x)$, falls der Portfolioanteil x hervorgehoben werden soll. Die Zielfunktion des Problems $P(\Delta)$ bezeichnen wir mit $f_{\mathfrak{D}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei $f_{\mathfrak{D}}(x) = \mathfrak{D}(\overline{W}(x))$ ist, und nennen diese Abweichungsfunktion. Wir halten nun einige Eigenschaften der Zielfunktion $f_{\mathfrak{D}}$ fest [14, Proposition 4]:

Lemma 2.21 (Portfolioabweichungen)
Sei $\mathfrak{D}$ ein Abweichungsmaß und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Portfolio in den von uns betrachteten Assets. Dann hat die Abweichungsfunktion $f_{\mathfrak{D}}$ folgende Eigenschaften:

(a) $f_{\mathfrak{D}}(0) = 0$ *und* $f_{\mathfrak{D}}(x) > 0$, *falls* $x \neq 0$

(b) $f_{\mathfrak{D}}(\lambda x) = \lambda f_{\mathfrak{D}}(x)$ *für alle* $\lambda > 0, x \in \mathbb{R}^n$

(c) $f_{\mathfrak{D}}(x^1 + x^2) \leq f_{\mathfrak{D}}(x^1) + f_{\mathfrak{D}}(x^2)$ *für alle* $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$

(d) $f_{\mathfrak{D}}(x) < \infty$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$

(e) $\{x \in \mathbb{R}^n | f_{\mathfrak{D}}(x) \leq \delta\}$ *ist kompakt für jedes* $\delta > 0$.

Bemerkung 2.22 *Die positive Homogenität* (b) *und die Subadditivität* (c) *implizieren die Konvexität von $f_{\mathfrak{D}}$. Weiterhin ist der effektive Definitionsbereich*

$$N := \{x \in \mathbb{R}^n | f_{\mathfrak{D}}(x) < \infty\}$$

eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Beweis nach [14].
Wir benutzen die in der Definition des Abweichungsmaßes $\mathfrak{D}$ formulierten Eigenschaften.
Zu (a): Nach (D1) ist $f_{\mathfrak{D}}(0) = \mathfrak{D}(0) = 0$. Wegen Annahme (A2') ist für jedes $x \neq 0$ die Zufallsvariable $\overline{W}(x) \neq konst.$ und damit $f_{\mathfrak{D}}(x) = \mathfrak{D}(\overline{W}(x)) > 0$ wegen (D1).

Zu (b): Wegen (D2) gilt $f_{\mathfrak{D}}(\lambda x) = \mathfrak{D}(\lambda \overline{W}(x)) = \lambda \mathfrak{D}(\overline{W}(x)) = \lambda f_{\mathfrak{D}}(x)$ für $\lambda > 0$.
Zu (c): Wegen (D3) gilt

$$f_{\mathfrak{D}}(x^1 + x^2) = \mathfrak{D}\left(\overline{W}(x^1) + \overline{W}(x^2)\right) \leq \mathfrak{D}\left(\overline{W}(x^1)\right) + \mathfrak{D}\left(\overline{W}(x^2)\right) = f_{\mathfrak{D}}(x^1) + f_{\mathfrak{D}}(x^2).$$

Zu (d): Betrachten wir die Menge N aus Bemerkung 2.22. Dann ist für $i \in \{1, ..., n\}$

$$\pm \frac{1}{s_i} e^i \in N \text{ mit } e^i = (0, ..., 0, \pm 1, 0, ..., 0)\,,$$

wobei ± 1 an der i-ten Stelle steht und $s_i > 0$ der Preis des Assets i ist, denn es gilt

$$f_{\mathfrak{D}}\left(\pm \frac{1}{s_i} e^i\right) = \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} s_j \cdot \left(\pm \frac{1}{s_i} e^i_j\right) R_j\right) = \mathfrak{D}\left(s_i \cdot \left(\pm \frac{1}{s_i}\right) \cdot R_i\right) = \mathfrak{D}(\pm R_i) < \infty,$$

da $\mathfrak{D}(R_i) < \infty$ und $\mathfrak{D}(-R_i) < \infty$ für alle i vorausgesetzt worden sind. Dann gilt aber wegen (b) und (c) auch

$$\lambda \cdot \left(\pm \frac{1}{s_i} e^i\right) + \mu \cdot \left(\pm \frac{1}{s_j} e^j\right) \in N \text{ für } i, j \in \{1, ..., n\} \text{ und } \lambda, \mu > 0.$$

Daraus folgt notwendigerweise $N = \mathbb{R}^n$. Also ist $f_{\mathfrak{D}}$ endlich auf ganz $\mathbb{R}^n$ und es gilt (d).
Zu (e): Wegen der Konvexität von $f_{\mathfrak{D}}$ auf $\mathbb{R}^n$ ist $f_{\mathfrak{D}}$ nach Satz A.9 stetig. Damit ist $N_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n | f_{\mathfrak{D}}(x) \leq \delta\}$ für alle $\delta \geq 0$ abgeschlossen. Da wegen (a) die Menge

$$N_0 = \{x \in \mathbb{R}^n | f_{\mathfrak{D}}(x) \leq 0\} = \{0\}$$

nichtleer und beschränkt ist, gilt nach Lemma von Fenchel (Satz A.10) auch (e).

$\square$

Wir halten Eigenschaften des parametrischen Optimierungsproblems $P(\Delta)$ und seine Lösungsmenge fest:
Die Zielfunktion ist konvex und damit stetig auf dem $\mathbb{R}^n$. Damit ist $P(\Delta)$ eine konvexe Optimierungsaufgabe mit Vorzeichenrestriktion und einer linearen Ungleichungsnebenbedingung mit Parameter Δ in der rechten Seite. Der zulässige Bereich ist für jedes Δ ein nichtleeres, abgeschlossenes Polyeder im $\mathbb{R}^n$.

Wir definieren bzgl. des Problems $P(\Delta)$ die Optimalwertfunktion $\delta^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gemäß

$$\delta^*(\Delta) := \inf\{f_{\mathfrak{D}}(x) | x \in B_{P(\Delta)}\}$$

und die Optimalstellenmenge als Punkt-Mengen-Abbildung $X^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ gemäß

$$X^*(\Delta) := \arg\min\{f_{\mathfrak{D}}(x) | x \in B_{P(\Delta)}\}.$$

Beide Größen hängen vom Parameter Δ ab. Wegen $f_{\mathfrak{D}}(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert $\inf f_{\mathfrak{D}}(x)$. Wir wollen nun zeigen, dass $X^*(\Delta) \neq \emptyset$ für beliebige Wahl von Δ gilt und dass sich $X^*(\Delta)$ aus $X^*(1)$ sofort angeben lässt.

Satz 2.23 (Existenz einer Lösung und Homogenität) *Für alle $\Delta \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) *Die Optimalstellenmenge $X^*(\Delta)$ von $P(\Delta)$ ist nichtleer, konvex und kompakt.*

(ii) *Es gilt für $\Delta \leq 0$:*

$$\delta^*(\Delta) = 0 \textit{ und } X^*(\Delta) = \{0\}$$

und für $\Delta > 0$:

$$\delta^*(\Delta) > 0 \textit{ mit } \delta^*(\Delta) = \Delta \cdot \delta^*(1) \textit{ und } X^*(\Delta) = \{\Delta \cdot x | x \in X^*(1)\}.$$

Zusätzlich gilt für $\Delta > 0$ und $x^* \in X^*(\Delta)$:

$$\sum_{j=1}^{n} s_j x_j (\mathbb{E}(R_j) - R_0) = \Delta.$$

Beweis nach [14].
Zu (i): Zunächst gilt $\delta^*(\Delta) \geq 0$, da nach Lemma 2.18 (a) $f_{\mathfrak{D}}(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.Wegen der Vollständigkeit des Marktes ist $B_{P(\Delta)} \neq \emptyset$. Wir definieren eine monoton fallende Folge $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$\delta_k > \delta^*(\Delta) \geq 0 \text{ und } \lim_{k\to\infty} \delta_k = \delta^*(\Delta).$$

Die Mengen vom Typ

$$M_k(\Delta) := \left\{x | f_{\mathfrak{D}}(x) \leq \delta_k, x \in B_{P(\Delta)}\right\}$$

für $k \in \mathbb{N}$ sind nach Definition von $\delta^*(\Delta)$ nichtleer, da für das Infimum gilt: für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $x \in B_{P(\Delta)}$ mit

$$\delta^*(\Delta) < f_{\mathfrak{D}}(x) < \delta^*(\Delta) + \epsilon \leq \delta_k.$$

Außerdem sind die Mengen $M_k(\Delta)$ kompakt, da

$$M_k(\Delta) = \underbrace{\{x | f_{\mathfrak{D}}(x) \leq \delta_k\}}_{\text{kompakt}} \cap \underbrace{\{x | x \in B_{P(\Delta)}\}}_{\text{abg., da Polyeder}}$$

gilt. Dabei ist $\{x \in \mathbb{R}^n | f_{\mathfrak{D}}(x) \leq \delta_k\}$ kompakt wegen Lemma 2.18 (d). Damit erhält man eine Schachtelung von Mengen mit $M_l(\Delta) \subseteq M_m(\Delta)$ für $l > m$. Jede solche Schachtelung nichtleerer kompakter Mengen hat einen nichtleeren Durchschnitt. Darüberhinaus sind die Mengen $M_k(\Delta)$ aufgrund der Konvexität von $f_{\mathfrak{D}}$ konvex, sodass der Durchschnitt ebenfalls konvex ist. Das zeigt, dass

$$X^*(\Delta) = \{x \in \mathbb{R}^n | f_{\mathfrak{D}}(x) \leq \delta^*(\Delta), x \in B_{P(\Delta)}\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k(\Delta)$$

nichtleer, konvex und kompakt ist.
Zu (ii): Fall $\Delta \leq 0$: zunächst ist $x = 0 \in B_{P(\Delta)}$ und damit $0 \leq \delta^*(\Delta) \leq f_{\mathfrak{D}}(0) = 0$ nach Lemma 2.18(a). Daher ist $\delta^*(\Delta) = 0$ und $0 \in X^*(\Delta)$. Da für $x \neq 0$ wegen Lemma 2.18(a) aber $f_{\mathfrak{D}}(x) > 0$ gilt, ist $X^*(\Delta) = \{0\}$.
Fall $\Delta > 0$: Wir zeigen

$$X^*(\Delta) = \{\Delta \cdot x | x \in X^*(1)\}.$$

Zunächst gilt

$$x \in B_{P(1)} \Leftrightarrow \Delta \cdot x \in B_{P(\Delta)}, \tag{2.1}$$

denn es ist

$$\sum_{j=1}^{n} s_j x_j (\mathbb{E}(R_j) - R_0) \geq 1 \iff \sum_{j=1}^{n} s_j \Delta x_j (\mathbb{E}(R_j) - R_0) \geq \Delta$$

und

$$x \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \cdot x \geq 0.$$

Die Existenz eines Portfolios $x \in X^*(1)$ wurde in (i) gezeigt. Dann ist

$$\begin{aligned} x \in X^*(1) &\Leftrightarrow f_{\mathfrak{D}}(x) = \delta^*(1) \\ &\Leftrightarrow \Delta \cdot f_{\mathfrak{D}}(x) = \Delta \cdot \delta^*(1) \\ &\Leftrightarrow f_{\mathfrak{D}}(\Delta \cdot x) = \Delta \cdot \delta^*(1) \end{aligned}$$

Zu zeigen ist, dass dies äquivalent ist zu $f_{\mathfrak{D}}(\Delta \cdot x) = \delta^*(\Delta)$ und damit zu $\Delta \cdot x \in X^*(\Delta)$.
Es gilt genau dann $f_{\mathfrak{D}}(x) = \delta^*(1)$, wenn kein $\tilde{x} \in B_{P(1)}$ existiert mit

$$f_{\mathfrak{D}}(\tilde{x}) < f_{\mathfrak{D}}(x).$$

Wegen $\Delta > 0$ und der positiven Homogenität von $f_{\mathfrak{D}}$ ist dies genau dann der Fall, wenn kein $\tilde{x} \in B_{P(1)}$ existiert

$$f_{\mathfrak{D}}(\Delta \cdot \tilde{x}) < f_{\mathfrak{D}}(\Delta \cdot x).$$

Wegen (2.1) ist dies äquivalent dazu, dass kein $\Delta \cdot \tilde{x} \in B_{P(\Delta)}$ existiert mit

$$f_{\mathfrak{D}}(\Delta \cdot \tilde{x}) < f_{\mathfrak{D}}(\Delta \cdot x).$$

Da wegen (2.1) aber jedes $\hat{x} \in B_{P(\Delta)}$ eine Darstellung $\hat{x} = \Delta \cdot \tilde{x}$ mit $\tilde{x} \in B_{P(1)}$ gestattet, ist dies genau dann der Fall, wenn kein $\hat{x} \in B_{P(\Delta)}$ existiert mit

$$f_{\mathfrak{D}}(\hat{x}) < f_{\mathfrak{D}}(\Delta \cdot x).$$

Das ist aber gerade äquivalent zur Behauptung, nämlich zu $f_{\mathfrak{D}}(\Delta \cdot x) = \delta^*(\Delta)$. Also gilt

$$x \in X^*(1) \Longleftrightarrow \Delta \cdot x \in X^*(\Delta).$$

Aus $X^*(\Delta) = \{\Delta \cdot x | x \in X^*(1)\}$ folgt über die positive Homogenität von $f_{\mathfrak{D}}$ unmittelbar

$$\delta^*(\Delta) = \Delta \cdot \delta^*(1).$$

Die Restriktion in $P(\Delta)$ muss aktiv sein für $\Delta > 0$ und $x^* \in X^*(\Delta)$, denn wäre

$$\sum_{j=1}^{n} s_j x_j^* (\mathbb{E}(R_j) - R_0) = \Delta' > \Delta,$$

dann gäbe es ein hinreichend kleines $\Theta \in (0,1)$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} s_j \Theta x_j^* (\mathbb{E}(R_j) - R_0) = \Theta\Delta' > \Delta,$$

also $\Theta x^* \in B_{P(\Delta)}$. Dann ist aber wegen Lemma 2.18(b)

$$f_{\mathfrak{D}}(\Theta x^*) = \Theta f_{\mathfrak{D}}(x^*) < f_{\mathfrak{D}}(x^*)$$

Das steht im Widerspruch zur Optimalität von x^*. □

Bemerkung 2.24

(a) *Die Lösung des Problems $P(\Delta)$ muss nicht eindeutig sein.*

(b) *Für $\Delta \leq 0$ ist also die gesamte Geldmenge in das risikofreie Asset zu investieren.*

Definition 2.25 (Basic Fonds und Einfacher Abweichungswert)
Wir nennen $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ einen Basic Fonds, falls $\overline{x} \in X^*(1)$ gilt. Die zugehörige minimale Abweichung $\overline{\delta} = \delta^*(1) = f_{\mathfrak{D}}(\overline{x})$ wird einfacher Abweichungswert genannt.

Die gewonnenen Erkenntnisse wollen wir auf unser Standardbeispiel 1.1 aus der Einleitung anwenden und das Problem $P(\Delta)$ lösen:

Beispiel 2.26 (Standardbeispiel) *Zunächst sind alle* Annahmen (A1), (A2), (A3) *an die riskanten Assets erfüllt, denn beispielsweise lässt sich sofort zeigen, dass $\mathbb{E}(R_1) = 2 > 1 = R_0$ gilt. Wir gehen davon aus, dass der betrachtete Investor die Standardabweichung σ als Abweichungsmaß $\mathfrak{D}$ wählt. Dann ist*

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(s_1 x_1 R_1) &= x_1\sqrt{\mathbb{E}[(R_1 - \mathbb{E}(R_1))^2]} = x_1\sqrt{\mathbb{E}[(R_1 - 2)^2]} \\ &= x_1\sqrt{\mathbb{E}(R_1^2) - 4\mathbb{E}(R_1) + 4} \\ &= 2x_1.\end{aligned}$$

Weiter ist

$$x_1(\mathbb{E}(R_1) - R_0) = x_1.$$

Damit lautet das Problem $P(\Delta)$ mit vom Investor vorgegebener Risikoprämie $\Delta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}2x_1 &\to \min! \\ x_1 &\geq \Delta, \\ x_1 &\geq 0.\end{aligned}$$

Für $\Delta \leq 0$ ist $x_1^* = 0$ die eindeutige Lösung der Aufgabe mit Optimalwert $f_\sigma(0) = 0$. Das zugehörige gemischte Portfolio ist $(x_0^*, x_1^*) = (1, 0)$.
Für $\Delta > 0$ ist $x_1^* = \Delta$ die eindeutige Lösung mit Optimalwert $f_\sigma(\Delta) = 2\Delta$. Das zugehörige gemischte Portfolio ist $(x_0^*, x_1^*) = (1 - \Delta, \Delta)$. Damit verschuldet sich der Investor durch Eingehen einer negativen Position in x_0^*, falls $\Delta > 1$ gewählt wird. Insbesondere gilt für $\Delta > 0$, wie im Satz 2.23 *bewiesen, die Darstellung*

$$X^*(\Delta) = \{x_1^* | x_1^* = \Delta \overline{x}_1,\ \overline{x}_1 \in X^*(1)\} \textit{ mit } X^*(1) = \{1\}.$$

Abschließend wollen wir noch ein zu $P(\Delta)$ äquivalentes, formal einfacheres Problem einführen, auf das wir uns später beziehen. Zur Bestimmung eines gemischten Portfolios $(x_0, x) = (x_0, x_1, ..., x_n)$ unter der Budgetbedingung

$$x_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j = 1$$

mit Abweichungsmaß $\mathfrak{D}$ lösten wir zur Bestimmung des Portfolios x das Problem

$$P(\Delta) : \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} s_j x_j R_j\right) \to \text{min!}$$

$$B_{P(\Delta)} \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} s_j x_j (\mathbb{E}(R_j) - R_0) \geq \Delta, \\ \qquad\qquad x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, ..., n. \end{cases}$$

Dabei ist Δ die individuell vorgegebene Risikoprämie. Durch die Substitution

$$z_j := s_j x_j \text{ für alle } j = 1, ..., n$$

erhalten wir dadurch die äquivalente Aufgabe

$$\mathcal{P}(\Delta) : \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j R_j\right) \to \text{min!}$$

$$B_{\mathcal{P}(\Delta)} \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_j (\mathbb{E}(R_j) - R_0) \geq \Delta, \\ \qquad\qquad z_j \geq 0 \quad \forall j = 1, ..., n. \end{cases}$$

Wir können also dieses formal einfachere Problem lösen und dann durch entsprechende Rücksubstitution eine Lösung der ursprünglichen Aufgabe ermitteln. Es gelten weiterhin die Annahmen 2.14 an die riskanten Assets und die daraus folgenden Eigenschaften des Marktes und der Assets. Für dieses Problem bezeichnen wir mit

$$d^*(\Delta) := \inf \left\{ \mathfrak{D} \left(\sum_{j=1}^{n} z_j R_j \right) \middle| z \in B_{\mathcal{P}(\Delta)} \right\}$$

die Optimalwertfunktion des Problems $\mathcal{P}(\Delta)$. Die Optimalstellenmenge werde bezeichnet mit

$$Z^*(\Delta) := \arg\min \left\{ \mathfrak{D} \left(\sum_{j=1}^{n} z_j R_j \right) \middle| z \in B_{\mathcal{P}(\Delta)} \right\}.$$

Damit lautet der Satz 2.20 mit diesen Formulierungen wie folgt:

Satz 2.27 *Für alle $\Delta \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) *Die Optimalstellenmenge $Z^*(\Delta)$ von $\mathcal{P}(\Delta)$ ist nichtleer, konvex und kompakt.*

(ii) *Es gilt für $\Delta \leq 0$:*

$$d^*(\Delta) = 0 \textit{ und } Z^*(\Delta) = \{0\}$$

und für $\Delta > 0$:

$$d^*(\Delta) > 0 \textit{ mit } d^*(\Delta) = \Delta \cdot d^*(1) \textit{ und } Z^*(\Delta) = \{\Delta \cdot z | z \in Z^*(1)\}.$$

Zusätzlich ist für $\Delta > 0$ die Budgetbeschränkung stets aktiv in $\mathcal{P}(\Delta)$.

Wir schreiben auch hier für den einfachen Abweichungswert $\overline{d} := d^*(1)$. Außerdem erinnern wir uns, dass die Lösung des Problems $\mathcal{P}(\Delta)$ nicht eindeutig zu sein braucht.

2.3. Nutzenfunktionen

In diesem Abschnitt führen wir Funktionen ein, mit denen der Investor die Portfoliowahl unter zwei Gesichtspunkten bewerten kann, nämlich dem Abweichungswert und dem Erwartungswert der bedingten Auszahlung. Im nächsten Abschnitt untersuchen wir, wie die optimale Wahl getroffen werden kann.
Wenn wir den Nutzen eines Portfolios anhand zweier Größen messen wollen, reicht die in der Finanzmathematik klassische Definition einer Nutzenfunktion in einer Variablen nicht aus. Nach [7] definiert man eine (Erwartungs-) Nutzenfunktion als reellwertige Abbildung in einer Variablen, die streng konkav und streng monoton wachsend ist.

Da unsere Maßzahlen für den Nutzen zufallsbehaftet sind, könnte man den Ansatz über monetäre Nutzenfunktionen, die für Zufallsvariablen definiert sind, wählen (vergleiche [5]). Dabei heißt eine eigentliche Funktion $V : \mathfrak{L}^2 \to [-\infty, \infty)$ monetäre Nutzenfunktion, falls folgende Eigenschaften gelten:

(V1) V ist monoton,

(V2) V ist konkav,

(V3) V ist cash-invariant, d.h. für alle $X \in \mathfrak{L}^2$ und alle $m \in \mathbb{R}$ gilt $V(X+m) = V(X) + m$.

Der Bildbereich von V ist eine Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dass dieser Ansatz durchaus sinnvoll sein könnte, zeigt sich, indem wir einen Bezug zu unseren in Abschnitt 2.1 eingeführten monetären Risikomaßen herstellen.

Lemma 2.28 $V : \mathfrak{L}^2 \to [-\infty, \infty)$ *ist genau dann eine monetäre Nutzenfunktion, wenn* $\mathfrak{R} = -V$ *ein konvexes, monetäres Risikomaß ist.*

Beweis. Für $X \in \mathfrak{L}^2$ und $m \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} V(X+m) = V(X) + m &\iff -V(X+m) = -V(X) - m \\ &\iff \quad \mathfrak{R}(X+m) = \mathfrak{R}(X) - m, \end{aligned}$$

also erfüllt V die Eigenschaft (V3) genau dann, wenn $\mathfrak{R} = -V$ (R1) erfüllt. Für $X, Y \in \mathfrak{L}^2$ mit $X \leq Y$ gilt

$$V(X) \geq V(Y) \iff -V(X) \leq -V(Y) \iff \mathfrak{R}(X) \leq \mathfrak{R}(Y),$$

also erfüllt V die Eigenschaft (V1) genau dann, wenn $\mathfrak{R} = -V$ (R4) erfüllt. Weiterhin ist V genau dann eine eigentliche, konkave Funktion, wenn $\mathfrak{R} = -V$ eine eigentliche, konvexe Funktion ist. Da jedes konvexe, monetäre Risikomaß eigentlich ist, folgt die Behauptung. $\square$

Wir erklären nun nach Rockafellar et al.[11], wie ein Investor den Nutzen eines Portfolios anhand des Erwartungswerts und der Abweichung der bedingten Auszahlung, also an zwei Variablen, messen kann. Daher definieren wir in dieser Arbeit Nutzenfunktionen in zwei Variablen wie folgt:

Definition 2.29 (Nutzenfunktion) *Eine Funktion* $U : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to [-\infty, \infty)$ *heißt Nutzenfunktion, falls sie folgende Eigenschaften hat:*

(U1) U *ist konkav,*

(U2) U *ist im 1. Argument streng monoton wachsend,*

(U3) U *ist im 2. Argument nicht wachsend,*

(U4) U *ist oberhalbstetig*

und hinsichtlich der einfachen Abweichung $\overline{\delta}$ *bezüglich* $\mathfrak{D}$ *gilt:*

(U5) $\forall \mu \in \mathbb{R}\ \forall \delta \in \left(0, \overline{\delta}\right]\ \exists\ t_1, t_2 > 0 :\ U(\mu + t_1, t_1 \cdot \delta) < U(\mu, 0) < U(\mu + t_2, t_2 \cdot \delta).$

Bei den Annahmen an U stützten sich Rockafellar et al. auf Mossin (1966), vergleiche dazu [10]. Im Unterschied zu dessen Arbeit wird jedoch auf die Endlichkeit, Stetigkeit und Differenzierbarkeit in den Annahmen verzichtet.
Wir wollen einen Zusammenhang zwischen U und V erklären. Dazu setzen wir für $X \in \mathfrak{L}^2$

$$V(X) := U(\mathbb{E}(X), \mathfrak{D}(X)).$$

Wir untersuchen, ob die Voraussetzungen an U auf die Eigenschaften von V führen:

(V1): Seien $X, Y \in \mathfrak{L}^2$ mit $X \geq Y$. Dann gilt

$$V(X) = U(\mathbb{E}(X), \mathfrak{D}(X)) \geq U(\mathbb{E}(Y), \mathfrak{D}(Y)) = V(Y),$$

da für die in dieser Arbeit als unterhalb dominiert angenommenen Abweichungsmaße $\mathfrak{D}$ und die nach Theorem 2.11 korrespondierenden Risikomaße $\mathfrak{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(X) &= \mathfrak{R}(X - \mathbb{E}(X)) \\ &= \mathfrak{R}(X) + \mathbb{E}(X) \\ &\overset{X \geq Y}{\leq} \mathfrak{R}(Y) + \mathbb{E}(Y) \\ &= \mathfrak{R}(Y - \mathbb{E}(Y)) = \mathfrak{D}(Y).\end{aligned}$$

(V2): Für $\lambda \in [0,1]$ und $X, Y \in \mathfrak{L}^2$ gilt

$$\begin{aligned}V(\lambda X + (1-\lambda)Y) =& U[\mathbb{E}(\lambda X + (1-\lambda)Y), \mathfrak{D}(\lambda X + (1-\lambda)Y)] \\ =& U[\lambda\mathbb{E}(X) + (1-\lambda)\mathbb{E}(Y), \mathfrak{D}(\lambda X + (1-\lambda)Y)] \\ \overset{(D3)}{\leq}& U[\lambda\mathbb{E}(X) + (1-\lambda)\mathbb{E}(Y), \mathfrak{D}(\lambda X) + \mathfrak{D}((1-\lambda)Y)] \\ \overset{(D2)}{=}& U[\lambda\mathbb{E}(X) + (1-\lambda)\mathbb{E}(Y), \lambda\mathfrak{D}(X) + (1-\lambda)\mathfrak{D}(Y)] \\ \overset{(U1)}{\leq}& \lambda \cdot U(\mathbb{E}(X), \mathfrak{D}(X)) + (1-\lambda) \cdot U(\mathbb{E}(Y), \mathfrak{D}(Y)) \\ =& \lambda V(X) + (1-\lambda)V(Y).\end{aligned}$$

Die Bedingung (V3) ist nicht immer erfüllt: Für $X \in \mathfrak{L}^2$ und $m \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}V(X+m) =& U(\mathbb{E}(X+m), \mathfrak{D}(X+m)) \\ \overset{(D4)}{=}& U(\mathbb{E}(X) + m, \mathfrak{D}(X)).\end{aligned}$$

Das ist aber nicht notwendig gleich $U(\mathbb{E}(X), \mathfrak{D}(X)) + m = V(X) + m$. Hinreichend dafür ist die Linearität von U im ersten Argument. In den Beispielen dieses Abschnitts wird dies erfüllt sein.

Wir definieren die Funktion $u : [0, \infty) \to [-\infty, \infty)$ als

$$u(t) := U(\mu + t, t \cdot \delta) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R},\ \delta \in [0, \infty). \tag{2.2}$$

Wir zeigen nun einige Eigenschaften von u.

Lemma 2.30 *Die Funktion u ist konkav und oberhalbstetig. Weiterhin gilt für $\delta \in (0, \overline{\delta}]$*

$$\exists t_1, t_2 > 0 : \ u(t_1) < u(0) < u(t_2).$$

Beweis. Wegen (U1) gilt für $\lambda \in [0,1]$ und $t_1, t_2 \in [0,\infty)$

$$\begin{aligned}
u(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) &= U(\mu + \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2, (\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \cdot \delta) \\
&= U(\mu + \lambda\mu - \lambda\mu + \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2, \lambda\delta t_1 + (1-\lambda)\delta t_2) \\
&= U(\lambda(\mu + t_1) + (1-\lambda)(\mu + t_2), \lambda\delta t_1 + (1-\lambda)\delta t_2) \\
&\geq \lambda U(\mu + t_1, \delta t_1) + (1-\lambda)U(\mu + t_2, \delta t_2) \\
&= \lambda u(t_1) + (1-\lambda)u(t_2).
\end{aligned}$$

Damit ist u konkav. Wegen (U4) ist u auch oberhalbstetig, denn für jede konvergente Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ mit Grenzwert $t \in [0,\infty)$ ist $(\mu+t_n, t_n\cdot\delta)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\times[0,\infty)$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $(\mu + t, t\cdot\delta)$ und nach (U4) gilt

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} u(t_n) &= \limsup_{n\to\infty} U(\mu + t_n, t_n \cdot \delta) \\
&\leq U(\mu + t, t\cdot\delta) = u(t).
\end{aligned}$$

Wegen (U5) existieren $t_1, t_2 > 0$ mit

$$u(t_1) = U(\mu + t_1, t_1 \cdot \delta) < U(\mu, 0) = u(0) < U(\mu + t_2, t_2\cdot\delta) = u(t_2).$$

□

Da u konkav ist, ist u auch unterhalbstetig. Also ist die Funktion insbesondere stetig auf $(0,\infty)$. Das folgende Lemma zeigt unter anderem, dass für die t_1, t_2 in Lemma 2.30 $t_1 < t_2$ gelten muss.

Lemma 2.31 *Es existiert ein* $\bar{t} \in (0,\infty)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für alle* $t \in (0,\bar{t})$ *gilt:* $u(t) > u(0)$,

(ii) *Es gilt* $u(\bar{t}) = u(0)$,

(iii) *Für alle* $t \in (\bar{t},\infty)$ *gilt:* $u(t) < u(0)$.

Es gilt außerdem:

(iv) $\lim_{t\to\infty} u(t) = -\infty$.

Bemerkung 2.32 *Aus den Eigenschaften* (i) – (iv) *folgt wegen der Konkavität von* u*, dass ein* $t_0 \in (0,\bar{t})$ *existieren muss, sodass* u *auf* $[0,t_0]$ *monoton wachsend und auf* $[t_0,\infty)$ *monoton fallend ist. Wegen der Oberhalbstetigkeit ist* u *außerdem sogar stetig auf* $[0,\infty)$*, also gilt* $\lim_{t\downarrow 0} u(t) = u(0)$.

Beweis. Angenommen, es gibt ein $\tilde{t} > 0$, sodass $u(t) \leq u(0)$ für alle $t \in [0, \tilde{t}]$ gilt. Sei $\hat{t} > \tilde{t}$ beliebig. Dann gilt

$$\tilde{t} = \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda)\hat{t}$$

für ein $\lambda \in (0, 1)$. Da u konkav ist, gilt

$$u(0) \geq u(\tilde{t}) \geq \lambda \cdot u(0) + (1 - \lambda)u(\hat{t}),$$

d.h. $(1 - \lambda)u(0) \geq (1 - \lambda)u(\hat{t})$, also gilt wegen $\lambda \in (0, 1)$: $u(\hat{t}) \leq u(0)$. Daraus folgt aber, da $\hat{t}$ beliebig gewählt war,

$$u(t) \leq u(0) \ \forall t \geq 0.$$

Das liefert einen Widerspruch zu Lemma 2.30.

Da die Annahme also ausgeschlossen werden kann, muss ein $\bar{t} > 0$ existieren, sodass für $t \in (0, \bar{t})$ gilt: $u(t) > u(0)$. Damit ist (i) erfüllt. Wegen Lemma 2.30 muss ein $\tilde{t} > \bar{t}$ existieren mit $u(\tilde{t}) < u(0)$. Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen kann $\bar{t} > 0$ also so gewählt werden, dass $u(\bar{t}) = u(0)$ gilt, also (ii). Es bleibt zu zeigen, dass $u(t) < u(0)$ für alle $t \in (\bar{t}, \infty)$ gilt.

Da wegen (i) ein $t_1 \in (0, \bar{t})$ existiert mit $u(t_1) > u(\bar{t})$, gilt wegen der Konkavität von u für beliebiges $t_2 > \bar{t}$

$$0 > \frac{u(\bar{t}) - u(t_1)}{\bar{t} - t_1} \geq \frac{u(t_2) - u(\bar{t})}{t_2 - \bar{t}}.$$

Dadurch fällt u aber unbeschränkt auf $(\bar{t}, \infty)$ und es gelten (iii) und (iv).

□

Abbildung 2.1 verdeutlicht den typischen Verlauf der Nutzenfunktion u und die nachgewiesenen Eigenschaften von $\bar{t}$. Mit dem verallgemeinerten Satz von Weierstraß (siehe Satz A.5 (a)) folgt außerdem die Existenz eines Maximums von u, wie aus der Abbildung ebenfalls ersichtlich wird.

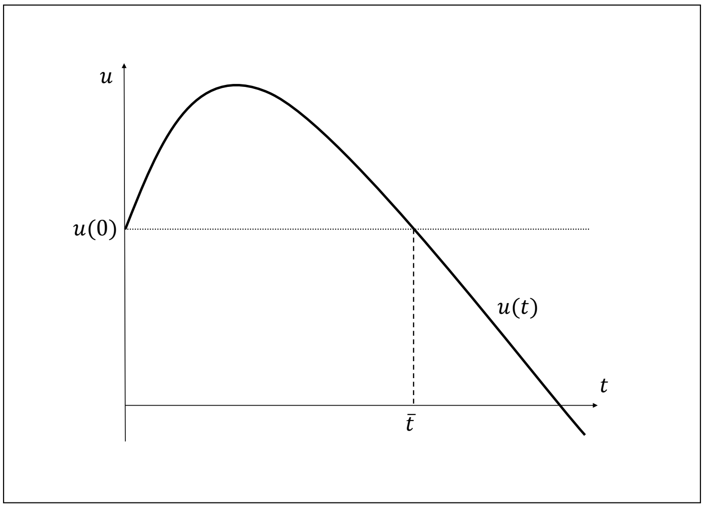

Abbildung 2.1.: Beispielhafter Verlauf von $u(t)$

Die Funktionswerte von u können interpretiert werden als jener Nutzen, der durch die Hinzunahme des Vielfachen t eines riskanten Portfolios mit erwartetem Ertrag 1 und Abweichung δ zu einem risikolosen Portfolio mit erwartetem Ertrag μ einhergeht. Durch die Hinzunahme ergibt sich ein Portfolio mit Erwartungswert $\mu + t$ und Abweichung $t \cdot \delta$. Das damit durch (U5) erklärte Verhalten der Funktion U wird aber nur für solche riskanten Portfolios vorgeschrieben, deren Abweichung $\delta < \overline{\delta}$ erfüllt. Dieses technische Hilfsmittel wird sich später als nützlich erweisen.

Bevor uns Beispielen von Nutzenfunktionen widmen, halten wir eine Charakterisierung der Oberhalbstetigkeit von U fest:

Lemma 2.33 *Die Oberhalbstetigkeit von U ist äquivalent zu folgender Aussage:*

$$\forall\ c \in \mathbb{R}:\ M(c) := \{(\mu,\delta) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) | U(\mu,\delta) \geq c\} \text{ ist abgeschlossen.}$$

Beweis. $(\Rightarrow)$: Wir betrachten eine Folge

$$((\mu_n,\delta_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{(\mu,\delta) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) | U(\mu,\delta) \geq c\}$$

mit $(\mu_n,\delta_n) \to (\mu_0,\delta_0)$ für $n \to \infty$. Dann gilt wegen der Oberhalbstetigkeit von U

$$c \leq \limsup_{n\to\infty} U(\mu_n,\delta_n) \overset{(U4)}{\leq} U(\mu_0,\delta_0).$$

Also ist $(\mu_0, \delta_0) \in M(c)$.

$(\Leftarrow)$: Sei $((\mu_n, \delta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge aus $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ mit Grenzwert (μ_0, δ_0). Angenommen, es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sup U(\mu_n, \delta_n) > U(\mu_0, \delta_0).$$

Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \sup U(\mu_n, \delta_n) \geq c > U(\mu_0, \delta_0).$$

Damit gilt $U(\mu_0, \delta_0) \notin M(c)$. Da

$$\lim_{n\to\infty} \sup U(\mu_n, \delta_n) \geq c$$

gilt, existiert eine konvergente Teilfolge $(\mu_{n_k}, \delta_{n_k})$ mit Grenzwert (μ_0, δ_0) und

$$U(\mu_{n_k}, \delta_{n_k}) \geq c.$$

Wegen $(\mu_{n_k}, \delta_{n_k}) \in M(c)$ und der Abgeschlossenheit von $M(c)$ gilt dann aber $(\mu_0, \delta_0) \in M(c)$ und es folgt ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch. $\square$

Wir halten einige Beispiele für solche Nutzenfunktionen aus [11] fest, zeigen aber noch zusätzlich, dass es sich dabei wirklich um Nutzenfunktionen handelt.

Beispiel 2.34 *Die nichtlineare Nutzenfunktion*

$$U(\mu, \delta) = \mu - \lambda\delta^q \text{ mit } \lambda \geq 0, q > 1$$

erfüllt alle Annahmen (U1) - (U5)*, unabhängig der Größe von* $\overline{\delta}$*. Für den linearen Fall* $q = 1$ *ist* (U5) *nicht erfüllt.*

Beweis. U ist konkav, denn es gilt für $t \in [0,1]$ und $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ sowie $\delta_1, \delta_2 \in [0,\infty)$

$$\begin{aligned}
U(t\mu_1 + (1-t)\mu_2, t\delta_1 + (1-t)\delta_2) &= t\mu_1 + (1-t)\mu_2 - \lambda(t\delta_1 + (1-t)\delta_2)^q \\
&\geq t\mu_1 + (1-t)\mu_2 - t\cdot\lambda\delta_1^q - (1-t)\cdot\lambda\delta_2^q \\
&= t(\mu_1 - \lambda\delta_1^q) + (1-t)(\mu_2 - \lambda\delta_2^q) \\
&= t\cdot U(\mu_1, \delta_1) + (1-t)\cdot U(\mu_2, \delta_2),
\end{aligned}$$

da $f(\delta) = \delta^q$ wegen $\delta \geq 0$ und $q > 1$ konvex ist. Also gilt (U1).
U ist offensichtlich streng wachsend in μ und damit gilt (U2). Wegen $\delta_1^q < \delta_2^q$ für

$0 \le \delta_1 < \delta_2$ ist U nicht wachsend bezüglich δ und damit gilt (U3).
Da U stetig ist, ist die Funktion auch oberhalbstetig und erfüllt damit (U4). Für $q > 1$ ist auch (U5) erfüllt, unabhängig von $\overline{\delta}$, denn es ist mit $t \ge 0$

$$u(t) = U(t + \mu, t\delta) = t + \mu - \delta(t\delta)^q = \mu + (t - \lambda t^q \delta^q),$$

wobei

$$t - \lambda t^q \delta^q \begin{cases} \ge 0, & \text{falls } t \le \frac{1}{\sqrt[(q-1)]{\lambda\delta^q}}, \\ < 0, & \text{falls } t > \frac{1}{\sqrt[(q-1)]{\lambda\delta^q}} \end{cases}$$

gilt. Damit ist für $t_1 < \frac{1}{\sqrt[(q-1)]{\lambda\delta^q}} < t_2$

$$U(t_1 + \mu, t_1\delta) < U(\mu, 0) < U(t_2 + \mu, t_2\delta)$$

und (U5) erfüllt. Für $q = 1$ ist hingegen für alle $t \ge 0$

$$u(t) = U(t + \mu, t\delta) = \mu + t(1 - \lambda \cdot \delta) \begin{cases} \le \mu, & \text{falls } 1 < \lambda\delta, \\ \ge \mu, & \text{falls } 1 > \lambda\delta \end{cases} .$$

Damit ist u für $\lambda\delta < 1$ eine streng wachsende lineare Funktion mit $u(t) \ge \mu$ für alle t, für $\lambda\delta = 1$ konstant μ und für $\lambda\delta > 1$ eine streng fallende lineare Funktion mit $u(t) \le \mu$ für alle t. Daher gilt (U5) nicht. □

Beispiel 2.35 *Für eine festgelegte obere Schranke $\hat{\delta} > 0$ der Abweichung betrachten wir*

$$U(\mu, \delta) = \begin{cases} \mu, & \textit{falls } \delta \le \hat{\delta}, \\ -\infty, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dann erfüllt U alle Annahmen (U1) - (U5)*, unabhängig der Größe von $\overline{\delta}$.*

Beweis. U ist zunächst konkav, denn es gilt

$$\begin{aligned} U(t\mu_1 + (1-t)\mu_2, t\delta_1 + (1-t)\delta_2) &= \begin{cases} t\mu_1 + (1-t)\mu_2, & \text{falls } (t\delta_1 + (1-t)\delta_2) \le \hat{\delta}, \\ -\infty, & \textit{sonst.} \end{cases} \\ &\ge t \cdot U(\mu_1, \delta_1) + (1-t) \cdot U(\mu_2, \delta_2) \end{aligned}$$

nach Fallunterscheidung: Ist δ_1 oder δ_2 größer als $\hat{\delta}$, so ist wegen $U(\mu_1, \delta_1) = -\infty$ bzw. $U(\mu_2, \delta_2) = -\infty$ die Ungleichung erfüllt. Im Fall $\delta_1, \delta_2 \le \hat{\delta}$ gilt aber auch $t\delta_1 + (1-t)\delta_2 \le \hat{\delta}$ und damit Gleichheit in der obigen Ungleichung.

U ist offensichtlich streng monoton wachsend in μ und nicht wachsend in δ. Daher gelten (U1) - (U3). Die Oberhalbstetigkeit von U und damit die Erfüllung von (U4) ist ebenfalls ersichtlich, da U für $\delta \leq \hat{\delta}$ stetig ist und für Folgen $(\mu_n, \delta_n)_n \to (\mu_0, \delta_0)$ mit $\mu_n \in \mathbb{R}$ und $\delta_n \in [\hat{\delta}, \infty)$ gilt offenbar wegen $U(\mu_n, \delta_n) = -\infty$ für $\delta_n > \hat{\delta}$

$$\limsup_{n\to\infty} U(\mu_n, \delta_n) \leq U(\mu_0, \delta_0).$$

Es bleibt (U5) zu zeigen, also die Existenz von $t_1, t_2 > 0$ mit

$$u(t_1) = U(t_1 + \mu, t_1\delta) = t_1 + \mu < U(\mu, 0) < t_2 + \mu = U(t_2 + \mu, t_2\delta) = u(t_2).$$

Da U streng monoton wachsend im ersten Argument und $0 < \hat{\delta} < \infty$ ist, können t_1 und t_2 so gewählt werden, dass $0 < t_2 \cdot \delta < \hat{\delta} < t_1 \cdot \delta$ gilt. Damit ist

$$u(t_1) = -\infty < \mu < t_2 + \mu = u(t_2)$$

und (U5) erfüllt. Dies gilt unabhängig von $\overline{\delta} > 0$. $\square$

Bemerkung 2.36 (vergleiche [11])

(a) Im letzten Beispiel 2.35 *wurde als Nebenbedingung eine sogenannte Abweichungskappe oder Abweichungsdeckel* $\hat{\delta} > 0$ *eingearbeitet, die die zugelassenen Werte* $\delta \geq 0$*, die wir als Abweichungen der bedingten Auszahlung interpretieren, beschränkt: für Werte* $\delta > \hat{\delta}$ *ähnelt das Strafkosten, indem man den Nutzen gleich* $-\infty$ *setzt. Damit lässt sich das Risiko von vorne herein nach oben beschränken und ermöglicht dennoch endlichen Nutzen: Die Menge*

$$M_e := \{(\mu, \delta) | U(\mu, \delta) > -\infty\}$$

ist konvex, da U *konkav ist. Wegen* (U5) *ist die* μ*-Achse in* M_e *enthalten, also gilt*

$$\forall\ \mu \in \mathbb{R} : (\mu, 0) \in M_e.$$

Soll mit endlichem Nutzen die Abweichung beschränkt sein, also $M_e \neq \mathbb{R} \times [0, \infty)$ *gelten, so muss* M_e *eine Art Streifen darstellen, das heißt mit gewissem* $\hat{\delta} > 0$ *gilt* $M_e = \{(\mu, \delta) | 0 \leq \delta \leq \hat{\delta}\}$.

(b) *Um auch im linearen Fall $q = 1$ von* Beispiel 2.34 *eine* (U5) *genügende Nutzenfunktion zu erhalten, kann man zumindest für $\lambda < 1/\overline{\delta}$ einen Abweichungsdeckel $\hat{\delta} > 0$ wie für* Beispiel 2.35 *einführen, da dann U für $\delta \leq \hat{\delta}$ eine wachsende, lineare Funktion mit $U(\mu, \delta) \geq U(\mu, 0)$ ist und $U(\mu, \delta) = -\infty$ sonst gilt. Die Größe von $\overline{\delta}$ ist daher in einigen Situationen entscheidend, ob es sich um eine Nutzenfunktion im Sinne unserer Definition handelt.*

Im Abschnitt 3.2 über Existenzsätze werden wir auf diese Beispiele im Bezug auf die Existenz eines Gleichgewichts zurückkommen.

2.4. Nutzenmaximierung

Wir betrachten weiterhin einen wie in Abschnitt 2.2 beschriebenen arbitragefreien Markt (D, S) mit Preisvektor $S = (1, s_1, ..., s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und nur einen Investor. Wir wollen nun, im ganzen Abschnitt [11] folgend, auf die angesprochene Fragestellung eingehen, wie genau ein Investor ein gemischtes Ausgangsportfolio (x_0^0, x^0) mit riskantem Portfolioanteil $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ unter seiner individuell gewählten Nutzenfunktion U zu einem gemischten Portfolio (x_0, x) umschichtet, wenn er zur Bewertung den Erwartungswert und Abweichungswert der bedingten Auszahlung $W \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ heranzieht. Dabei wählt er wie früher auch das unterhalbstetige, unterhalb dominierte Abweichungsmaß $\mathfrak{D}$ individuell.
Sei $x_j^0 \in \mathbb{R}$ der Aktienanteil des Investors in $t = 0$ am Asset $j = 1, \dots, n$ und $x_0^0 \in \mathbb{R}$ die vom Investor in $t = 0$ ursprünglich gehaltene Menge vom risikolosen Asset. Das Vermögen des Investors in $t = 0$ unter den Preisen s_j ist dann gegeben durch

$$w(S) := x_0^0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j^0. \tag{2.3}$$

Wir fordern nicht $x_0^0 \geq 0$, sodass dieses Vermögen auch durchaus negativ und damit der Investor verschuldet sein kann. Dies entspricht ganz unserer früheren Betrachtungsweise. Auf dem Markt handelt der Investor in $t = 0$ mit den Aktien j. Er schichtet die Aktienanteile x_j^0 zum Preis s_j zu $x_j \geq 0$ für $j = 1, ..., n$ um, das heißt unter Beachtung der Selbstfinanzierungsbedingung

$$w(S) = x_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j. \tag{2.4}$$

Die bedingte Auszahlung zum Zeitpunkt $t = 1$ ist dann gegeben durch

$$W := W(x_0, x) = x_0(1 + R_0) + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j (1 + R_j). \tag{2.5}$$

Zusammenfassend ergibt sich das folgende Optimierungsproblem zur Bestimmung eines gemischten Portfolios $(x_0, x) = (x_0, x_1, ..., x_n)$:

$$\begin{aligned} U(\mathbb{E}(W), \mathfrak{D}(W)) &\to \max! \\ x_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j &= w(S), \\ x_j \geq 0\ \forall j &= 1, ..., n. \end{aligned}$$

Wegen der Selbstfinanzierungsbedingung (2.4) können wir x_0 durch

$$x_0 = w(S) - \sum_{j=1}^{n} s_j x_j.$$

eliminieren, was dazu führt, dass der Investor sich wieder nur um die Bestimmung des Portfolios $x \geq 0$ kümmern braucht: Durch Einsetzen in die Darstellung (2.5) für die bedingte Auszahlung W ergibt sich

$$W = w(S)(1 + R_0) + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j (R_j - R_0)$$

und damit

$$\mathbb{E}(W) = w(S)(1 + R_0) + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j (\mathbb{E}(R_j) - R_0)$$

sowie

$$\mathfrak{D}(W) = \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} s_j x_j (R_j - R_0)\right) \overset{\text{(D4)}}{=} \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} s_j x_j R_j\right).$$

Daraus ergibt sich das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \overline{P}(S): \quad U\left(w(S)(1 + R_0) + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j (\mathbb{E}(R_j) - R_0), \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} s_j x_j R_j\right)\right) &\to \max! \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Das führt mit der schon früher verwendeten Substitution $z_j := s_j x_j$ für $j = 1, ..., n$ auf das folgende äquivalente Optimierungsproblem:

$$\overline{P}'(S) : U\left(w(S)(1+R_0) + \sum_{j=1}^{n} z_j(\mathbb{E}(R_j) - R_0), \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j R_j\right)\right) \to \max!$$
$$z = (z_1, ..., z_n) \geq 0.$$

Die einzige Forderung an z ist demnach die Nichtnegativität.

Wir wollen unseren Ansatz aus Abschnitt 2.2 wieder aufgreifen, indem sich ein Investor bei der Portfoliowahl x für das Inkaufnehmen des Risikos eine individuelle Risikoprämie $\Delta \in \mathbb{R}$ vorgibt. Daher betrachten wir nun das folgende (wie wir sehen werden zu $\overline{P}'(S)$ äquivalente) Optimierungsproblem, indem Δ als Entscheidungsvariable eingeht:

$$\overline{P}''(S) : U\left(w(S)(1+R_0) + \Delta, \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j R_j\right)\right) \to \max_{(\Delta,z)}!$$

$$B_{\overline{P}''(S)} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} z_j(\mathbb{E}(R_j) - R_0) \geq \Delta, \\ z \geq 0, \\ \Delta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Lemma 2.37 (Äquivalenz von $\overline{P}'(S)$ und $\overline{P}''(S)$)
Sei $S \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ und $z^* \in \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:

(i) *z^* ist Lösung von $\overline{P}'(S)$*

(ii) *(Δ^*, z^*) mit*

$$\Delta^* = \sum_{j=1}^{n} z_j^*(\mathbb{E}(R_j) - R_0) \geq 0$$

ist Lösung von $\overline{P}''(S)$.

Beweis. Für $(\Delta, z) \in B_{\overline{P}''(S)}$ gilt wegen der Monotonie im ersten Argument von U

$$\begin{aligned} &U\left(w(S)(1+R_0) + \Delta, \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j R_j\right)\right) \\ &\leq U\left(w(S)(1+R_0) + \sum_{j=1}^{n} z_j(\mathbb{E}(R_j) - R_0), \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j R_j\right)\right). \end{aligned}$$

Also gilt insbesondere

$$\begin{aligned}&\max_{B_{\overline{P}''(S)}} U\left(w(S)(1+R_0)+\Delta, \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j R_j\right)\right)\\ =&\max_{z\geq 0} U\left(w(S)(1+R_0)+\sum_{j=1}^{n} z_j(\mathbb{E}(R_j)-R_0), \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j R_j\right)\right),\end{aligned}$$

was dem Problem $\overline{P}'(S)$ entspricht. Also sind $\overline{P}'(S)$ und $\overline{P}''(S)$ äquivalent. Aus den Beobachtungen folgt nun: für jede Lösung (Δ^*, z^*) von $\overline{P}''(S)$ muss wegen der Monotonie in der ersten Komponente von U

$$\Delta^* = \sum_{j=1}^{n} z_j^*(\mathbb{E}(R_j)-R_0)$$

gelten. Dabei muss wegen $z^* \geq 0$ und Annahme (A1) über die erwarteten Renditen, d.h. $\mathbb{E}(R_j) > R_0$ für alle $j = 1, \ldots, n$, auch $\Delta^* \geq 0$ gelten. Das zeigt (i) $\Leftrightarrow$ (ii). $\square$

Insbesondere brauchen wir im Folgenden in Bezug auf Optimallösungen von $\overline{P}''(S)$ nur $\Delta \geq 0$ betrachten. Betrachten wir nun $\overline{P}''(S)$ für festes $\Delta \geq 0$, dann hängt das Problem nur von z ab. Da $U(\mu, \delta)$ wegen (U3) nicht-wachsend hinsichtlich δ ist und z nur in δ eingeht, kann dies auf das von S unabhängige Problem

$$\mathcal{P}(\Delta) : \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j R_j\right) \to \min!$$

$$B_{\mathcal{P}(\Delta)} \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_j(\mathbb{E}(R_j)-R_0) \geq \Delta, \\ \qquad\qquad z_j \geq 0 \quad \forall j = 1, ..., n. \end{cases}$$

aus Abschnitt 2.2 zurückgeführt werden. Damit sind $\mathcal{P}(\Delta)$ und $\overline{P}''(S)$ für festes Δ äquivalent. Genauer können wir die Erkenntnisse zu $\mathcal{P}(\Delta)$ aus Satz 2.27 direkt anwenden und machen eine Fallunterscheidung für Δ:

<u>Für $\Delta > 0$</u> ist nach Satz 2.27 der Optimalwert von $\mathcal{P}(\Delta)$

$$d^*(\Delta) = \Delta \cdot d^*(1) = \Delta \cdot \overline{d}$$

wobei $\overline{d} = d^*(1)$ der einfache Abweichungswert ist. Der Optimalwert von $\overline{P}''(S)$ ist damit

$$U\left(w(S)(1+R_0)+\Delta,\Delta\overline{d}\right).$$

Für $\Delta \leq 0$ ist nach Satz 2.27 der Optimalwert von $\mathcal{P}(\Delta)$ gerade $d^* = 0$ und wird durch die Wahl $z^* = 0$ erreicht. Es gilt dann aber für die Zielfunktion von $\overline{P}''(S)$

$$U\left(w(S)(1+R_0)+\Delta,0\right) \leq U\left(w(S)(1+R_0),0\right).$$

Aus dieser Fallunterscheidung folgt, dass sich das Problem $\overline{P}''(S)$ reduzieren lässt auf ein nur von $\Delta \geq 0$ abhängiges Problem, nämlich

$$U\left(w(S)(1+R_0)+\Delta,\Delta\overline{d}\right) \to \max_{\Delta\geq 0}!.$$

Deren Optimalstellenmenge bezeichnen wir mit

$$M(S) := \left\{\Delta^* \in \mathbb{R} \,\middle|\, \Delta^* \in \arg\max_{\Delta\geq 0} U(w(S)(1+R_0)+\Delta,\Delta\cdot\overline{d})\right\}$$

und erinnern daran, dass $Z^*(1) \neq \emptyset$ nach Satz 2.27 hinsichtlich jedes Abweichungsmaßes $\mathfrak{D}$ gilt und somit $\overline{d}$ wohldefiniert ist.

Lemma 2.38 (Zusammenhang zwischen $\overline{P}''(S)$ und $\mathcal{P}(\Delta^*)$)
Seien $S \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \Delta^* \in \mathbb{R}$ und $z^* \in \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:

(i) (Δ^*, z^*) *ist Lösung von* $\overline{P}''(S)$.

(ii) *Es gilt $\Delta^* \in M(S)$ und es gibt ein $\overline{z} \in Z^*(1)$ derart, dass $z^* = \Delta^* \cdot \overline{z}$ Lösung von $\mathcal{P}(\Delta^*)$ ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$): Sei (Δ^*, z^*) Lösung von $\overline{P}''(S)$. Wie oben gesehen impliziert das, dass z^* Lösung von $\mathcal{P}(\Delta^*)$ ist. Wegen Lemma 2.37 ist $\Delta^* \geq 0$ und daher hat z^* nach Satz 2.27 die Gestalt $z^* = \Delta^*\overline{z}$ mit $\overline{z} \in Z^*(1)$ und liefert

$$\mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^n z_j R_j\right) = d^*(\Delta^*) = \Delta^* \cdot \overline{d}.$$

Damit ist $\Delta^* \in M(S)$.

($\Leftarrow$): Seien $\Delta^* \in M(S)$ und $\overline{z} \in Z^*(1)$ derart, dass $z^* = \Delta^* \cdot \overline{z}$ gilt und z^* Lösung von $\mathcal{P}(\Delta^*)$ ist. Dann ist $\Delta^* \geq 0$ und wegen der Monotonie von U im zweiten Argument gilt für das Problem $\overline{P}''(S)$

$$\begin{aligned}
&\arg\max_{z\geq 0} U\left(w(S)(1+R_0)+\Delta^*, \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^n z_j R_j\right)\right) \\
= \quad &\underset{\substack{z\geq 0 \\ \sum_{j=1}^n z_j(\mathbb{E}(R_j)-R_0)=\Delta^*}}{\arg\min} \quad \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^n z_j R_j\right).
\end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu $\mathcal{P}(\Delta^*)$, dessen Lösungsmenge nach Satz 2.27

$$Z^*(\Delta^*) = \{z \in \mathbb{R}^n | z = \overline{z}\Delta^* \text{ mit } \overline{z} \in Z^*(1)\}$$

ist. Damit ist $z^* \in Z^*(\Delta^*)$ und wegen $\Delta^* \in M(S)$ ist (Δ^*, z^*) eine Optimallösung von $\overline{P}''(S)$.

□

Für die Optimalstellenmenge $M(S)$ zeigen wir abschließend folgende Eigenschaften.

Lemma 2.39 *Sei $S \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. Dann ist $M(S)$ ein nichtleeres, kompaktes Teilintervall von $(0,\infty)$.*

Beweis. Wir wissen bereits nach Definition, dass $M(S) \subseteq [0,\infty)$ gilt. Die Funktion

$$U(w(S)(1+R_0)+\Delta, \Delta\cdot\overline{d})$$

stimmt unter den Bezeichnungen (2.2) aus Abschnitt 2.3 mit

$$\begin{aligned}
&u : [0,\infty) \to [-\infty,\infty) \\
&u(t) := U(\mu + t, t\cdot\delta) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R},\ \delta \in [0,\infty)
\end{aligned}$$

überein indem wir $\mu = w(S)(1+R_0)$ und $\delta = \overline{d}$ setzen. Somit ist nach Lemma 2.30 u oberhalbstetig und konkav mit für $u(0)$ endlichem Wert. Wegen Eigenschaft (U5) der Nutzenfunktion gibt es

$$\Delta^1, \Delta^2 > 0 : \quad u(\Delta^1) < u(0) < u(\Delta^2).$$

Folglich ist nach Lemma 2.33 die Menge

$$\{\Delta \geq 0 | u(\Delta) \geq u(0)\}$$

ein nichtleeres, kompaktes Teilintervall von $[0, \infty]$, das $M(S)$ enthält. Da wegen der Existenz von $\Delta^2 > 0$ aber $0 \notin M(S)$ gilt, ist $M(S)$ ein nichtleeres, kompaktes Teilintervall von $(0, \infty)$. Aus dem verallgemeinerten Satz von Weierstraß folgt die Existenz eines Maximums, da u oberhalbstetig und konkav ist. □

Bevor wir uns nun Marktgleichgewichten widmen, kehren wir noch einmal zu unserem Standardbeispiel 1.1 zurück, das wir bereits als Beispiel 2.26 zur Lösung von $P(\Delta)$ verwendeten.

Beispiel 2.40 (Standardbeispiel) *Der Investor habe sich eine Risikoprämie $\Delta > 0$ vorgegeben und dadurch ein, wie in* Beispiel 2.26 *berechnetes, Ausgangsportfolio $(x_0^0, x_1^0) = (1 - \Delta, \Delta)$ im Zeitpunkt* 0*. Dadurch hat er ein Vermögen $w(S) = 1$ bei dem Preisvektor $S = (1, 1)$. Er wählt weiterhin die Standardabweichung σ als Abweichungsmaß $\mathfrak{D}$ und die Nutzenfunktion*

$$U = U(\mu, \delta) = \mu - \delta^2,$$

siehe auch Beispiel 2.34*. Dann lautet das Problem $\overline{P}(S)$ mit $S = (1, 1)$:*

$$U(2 + x_1, 2x_1) = 2 + x_1 - 4x_1^2 \longrightarrow \max! \qquad x_1 \geq 0.$$

Die notwendige Bedingung für ein Optimum lautet $-8x_1 + 1 = 0$ und damit ist $x_1^* = \frac{1}{8}$. Damit ist wegen der Selbstfinanzierungsbedingung das optimale gemischte Portfolio $(x_0^*, x_1^*) = \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right)$ mit Nutzen $U^* = \frac{33}{16}$.

Wir lösen noch $\overline{P}''(S)$: wegen $s_1 = 1$ ist $z_1 := x_1$ und damit stimmt $\overline{P}'(S)$ mit $\overline{P}(S)$ überein. Damit ist $z_1^* = x_1^* = \frac{1}{8}$ Lösung von $\overline{P}'(S)$. Wegen unseren Überlegungen zu Lemma 2.37 *muss für eine Lösung (Δ^*, z^*)*

$$\Delta^* = z_1^*(\mathbb{E}(R_1) - R_0) = z_1^* \geq 0$$

mit z_1^* Lösung von $\overline{P}'(S)$ gelten. Also ist $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ eindeutige Lösung von $\overline{P}''(S)$. Der optimale Nutzenwert ist wegen der Äquivalenz der Probleme ebenfalls $U^* = \frac{33}{16}$.

3. Gleichgewichtsmodell für mehrere Investoren

In diesem Kapitel stellen wir uns der Frage nach der Gestalt und Existenz von Marktgleichgewichten. Zunächst spezifizieren wir, wie der Markt unter mehreren Investoren aussieht und was dies für unsere Relevanzannahme bedeutet sowie was wir unter einem Gleichgewicht verstehen und wie dieses charakterisiert werden kann. Anhand unseres Standardbeispiels werden wir ein Marktgleichgewicht und den zugehörigen Preisvektor für den beschriebenen Markt bestimmen. Im zweiten Abschnitt werden wir Existenzaussagen für Marktgleichgewichte unter anderem durch Zuhilfenahme von Fixpunktargumenten formulieren und nachweisen. Dabei werden wir auch klären, ob unter unseren Annahmen stets ein Gleichgewicht existiert. Dabei gehen wir in Abschnitt 3.1 und 3.2 nach [11] vor. Im letzten Abschnitt stellen wir noch eine Verbindung zur Spieltheorie und Nash-Gleichgewichten her.

3.1. Marktgleichgewicht

Wir gehen von den Betrachtungen über einen einzelnen Investor zu Beginn von Abschnitt 2.4 aus und ändern diese nun wie folgt ab: es gibt nun m Investoren und jeder Investor $i \in \{1, \dots, m\}$ besitzt im Zeitpunkt $t = 0$ bereits ein gemischtes Portfolio $(x_{i0}^0, x_i^0) = (x_{i0}^0, x_{i1}^0, \dots, x_{in}^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x_{ij}^0 \geq 0$ für $j = 1, \dots, n$. Der Index i an den Symbolen für die Probleme, wie $P_i(\Delta_i), \overline{P}_i'(S)$, etc. , und Funktionen, wie $U_i, \mathfrak{D}_i$, etc., sowie Portfolios verdeutlicht, dass wir uns auf diesen Investor i beziehen. Wir untersuchen nun, wie der Preisvektor $S = (1, s_1, ..., s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit den Handelsstrategien der Investoren zusammenhängt.

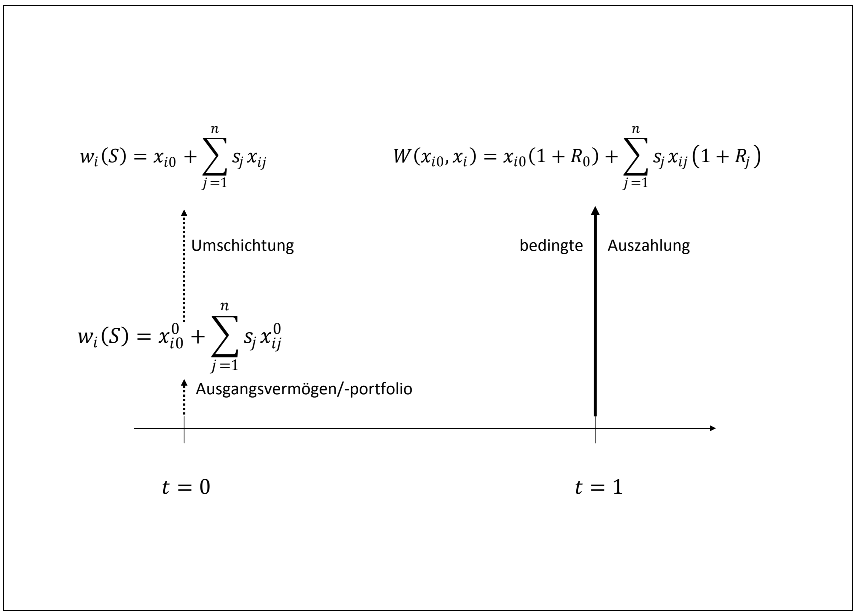

Abbildung 3.1.: Der Handelsvorgang

Wichtig ist hierbei, dass der Preisvektor S nicht länger fest vorgegeben ist und vor allem nicht notwendig positiv ist. Wir werden allerdings feststellen, dass diese bisherige Vorzeichenannahme für unsere Gleichgewichtsuntersuchungen durchaus zweckmäßig war. Abbildung 3.1 verdeutlicht den betrachteten Handelsvorgang: durch das gemischte Ausgangsportfolio (x_{i0}^0, x_i^0) besitzen die Investoren jeweils ein Vermögen

$$w_i(S) := x_{i0}^0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_{ij}^0.$$

Im Zeitpunkt $t = 0$ strukturieren die Investoren ihr gemischtes Ausgangsportfolio zu (x_{i0}, x_i) mit $x_{ij} \geq 0$ für $j = 1, \ldots, n$ unter Beachtung der Selbstfinanzierungsbedingung

$$w_i(S) = x_{i0} + \sum_{j=1}^{n} s_j x_{ij} \tag{3.1}$$

um. In $t = 1$ findet die von $R_0, R_1, \ldots, R_n \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ abhängende bedingte Auszahlung statt, die durch

$$W_i := W(x_{i0}, x_i) = x_{i0}(1 + R_0) + \sum_{j=1}^{n} s_j x_{ij}(1 + R_j).$$

gegeben ist. Des Weiteren sei $a_j > 0$ die Gesamtzahl der Aktien eines riskanten Assets j für $j = 1, ..., n$ mit

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^0 = a_j.$$

Wir erinnern noch einmal auf die im Anhang B zusammengefassten Annahmen, die wir bisher getroffen haben. Die Relevanzannahme (A3) erhält nun eine neue Bedeutung, wenn wir den Begriff der Relevanz für mehrere Investoren erfassen:

Definition 3.1 *Ein Asset $j = 1, ..., n$ heißt irrelevant für den Markt unter mehreren Investoren $i = 1, \ldots, m$, falls hinsichtlich der gewählten Abweichungsmaße $\mathfrak{D}_i$ keine Lösung x_i^* irgendeines Problems $P_i(\Delta_i)$ existiert mit $x_{ij}^* > 0$.*

Wir sehen, dass die bisherige Bezeichnung für einen Investor von Seite 14 darin enthalten ist. Daher sprechen wir wieder nur von *irrelevant* und verzichten auf den Zusatz *für mehrere Investoren.* Aus der Relevanzannahme (A3) der riskanten Assets $j = 1, ..., n$ und Satz 2.23 ergibt sich folgende wichtige Konsequenz für die Wahl der Basic Fonds. Diese gilt auch für $\overline{z}_i \in Z_i^*(1)$ gemäß des entsprechenden Satzes 2.27 und der sich auf $\mathcal{P}_i(\Delta_i)$ übertragenden Relevanzannahme.

Folgerung 3.2

(a) *Es gibt stets eine Auswahl von Vektoren $x_i^* \in X_i^*(1)$, $i = 1, \ldots, m$, sodass für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ein x_l^* existiert mit $x_{lj}^* > 0$.*

(b) *Es gibt stets eine Auswahl von Vektoren $z_i^* \in Z_i^*(1)$, $i = 1, \ldots, m$, sodass für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ein z_l^* existiert mit $z_{lj}^* > 0$.*

Beweis. Wir zeigen nur die Behauptung (a), da der Beweis von (b) völlig analog verläuft. Aus der Relevanzannahme (A3) kann mit Satz 2.23 gefolgert werden, dass kein riskantes Asset $k \in \{1, ..., n\}$ existiert, so dass für alle $i \in \{1, ..., m\}$ und jede Optimallösung $x_i^* \in X_i^*(1)$ gilt: $x_{ik}^* = 0$. Das garantiert, dass für jedes $i \in \{1, ..., m\}$ eine endliche Menge von Basic Fonds

$$B_i := \{x_i^{*l} \in X_i^*(1) | l = 1, ..., n_i\}$$

mit $1 \leq n_i \leq n$ derart gewählt werden kann, sodass gilt: für jedes Asset $j \in \{1, \ldots, n\}$ existiert ein $i \in \{1, \ldots, m\}$, sodass es ein $x_i^{*l} \in B_i$ gibt mit $x_{ij}^{*l} > 0$.

Weiter gilt für diese Vektoren aus B_i

$$x_i^* := \frac{x_i^{*1} + \cdots + x_i^{*n_i}}{n_i} \in X_i^*(1) \text{ für alle } i = 1, \ldots, m$$

wegen der Konvexität von $X_i^*(1)$. Nach den vorigen Betrachtungen gibt es dann zu jedem $j \in \{1, \ldots, n\}$ ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, sodass $x_{ij}^* > 0$ gilt, da $x_i^{*l} \geq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und alle $l \in \{1, \ldots, n_i\}$ gilt und für wenigstens ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ ein $k \in \{1, \ldots, n_i\}$ existiert mit $x_{ij}^{*k} > 0$. Damit erfüllen die m Vektoren x_i^* die Behauptung. □

Bemerkung 3.3

(a) Folgerung 3.2 *gilt äquivalent für eine Auswahl von* $x_i^* \in X_i^*(\Delta)$ *bzw.* $z_i^* \in Z_i^*(\Delta)$ *mit* $i = 1, \ldots, n$.

(b) *Die Mengen* B_i *im Beweis müssen nicht eindeutig sein und damit auch nicht die* x_i^*.

(c) *Im Allgemeinen existiert kein einzelner Vektor* x_i^* *mit* $x_i^* > 0$.

Mit Hilfe der Probleme $\overline{P}_i(S)$ für $i = 1, \ldots, m$ und den Ergebnissen aus Abschnitt 2.4 wollen wir untersuchen, ob und wann sich auf einem Markt unter Betrachtung von m Investoren eine Situation einstellt, sodass man von einem Gleichgewicht sprechen kann. Wir definieren dieses für unsere Ausführungen nach [11] wie folgt:

Definition 3.4 (Marktgleichgewicht)
Seien $(x_{i0}^*, x_i^*) = (x_{i0}^*, x_{i1}^*, \ldots, x_{in}^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *für* $i = 1, ..., m$ *und* $a_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^0$ *für* $j = 1, ..., n$. *Dann heißt das Tupel* $(x_1^*, \ldots, x_m^*)$ *zusammen mit einem Preisvektor* $S = (1, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *ein Marktgleichgewicht oder kurz Gleichgewicht, falls gilt:*

(i) $s_j > 0$ *für* $j = 0, 1, \ldots, n$

(ii) x_i *löst* $\overline{P_i}(S)$

(iii) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^* = a_j$ *für* $j = 1, \ldots, n$.

Rockafellar et al. setzen also für Marktgleichgewichte nach (i) positive Preise der Assets voraus. Wir untersuchen diese hier unter Abwesenheit von Leerverkäufen. In [17] untersuchen Rockafellar et.al. auch diesen Fall und zeigen die Existenz von Gleichgewichten unter Leerverkäufen sowie notwendig positive Preise der Assets im Gleichgewicht.

In Bedingung (ii) geht auf Grund unserer Umformungen auf Seite 35 zu $\overline{P}_i'(S)$ die Selbstfinanzierungsbedingung (3.1) ein. Es kommen also für ein Marktgleichgewicht nur jene gemischten Portfolios (x_{i0}^*, x_i^*) in Betracht, die diese Bedingung erfüllen.

Die Gleichungen (iii) besagen, dass auch nach dem Handeln weiterhin alle Aktien der riskanten Assets $j = 1, ..., n$ von den Investoren $i = 1, ..., m$ gehalten werden. Es findet also Markträumung statt und die Anzahl der gehandelten Aktien hat sich nicht geändert. Damit gilt für das risikolose Asset in einem Gleichgewicht

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i0}^0 = \sum_{i=1}^{m} x_{i0}^*,$$

denn: betrachten wir die Selbstfinanzierungsbedingung

$$w_i(S) = x_{i0}^0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_{ij}^0 = x_{i0}^* + \sum_{j=1}^{n} s_j x_{ij}^*,$$

so folgt in einem Marktgleichgewicht

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \left(x_{i0}^0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_{ij}^0 \right) &= \sum_{i=1}^{m} \left(x_{i0}^* + \sum_{j=1}^{n} s_j x_{ij}^* \right) \\
\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} x_{i0}^0 + \sum_{j=1}^{n} s_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^0 \right) &= \sum_{i=1}^{m} x_{i0}^* + \sum_{j=1}^{n} s_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^* \right) \\
\overset{(iii)}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{m} x_{i0}^0 + \sum_{j=1}^{n} s_j a_j &= \sum_{i=1}^{m} x_{i0}^* + \sum_{j=1}^{n} s_j a_j \\
\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} x_{i0}^0 &= \sum_{i=1}^{m} x_{i0}^*
\end{aligned}$$

Wir brauchen uns, wie früher, nur auf die Bestimmung des Portfolios $x_i \in \mathbb{R}^n$ zu konzentrieren. Das gemischte Portfolio (x_{i0}, x_i) einer Handelsstrategie ergibt sich dann wieder als Konsequenz der Wahl von $x_i \in \mathbb{R}^n$ aus

$$x_{i0} = w_i(S) - \sum_{j=1}^{n} s_j x_{ij}.$$

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen an den Preisvektor S und an die Wahlen von x_i bzw. z_i sich ein Gleichgewicht auf dem zugehörigen Markt einstellen kann. Dazu charakterisieren wir zunächst Marktgleichgewichte durch die in Kapitel 2 untersuchten Optimierungsprobleme $\overline{P}'_i(S)$ und $\overline{P}''_i(S)$. Wir verweisen für eine Übersicht aller Optimierungsprobleme auf Anhang D. Zuerst stellen wir einen Zusammenhang zu $\overline{P}'_i(S)$ her.

Satz 3.5 (Erster Charakterisierungssatz für Marktgleichgewichte)
Seien $S = (1, s_1, \dots, s_n) > 0$, $(x^*_{i0}, x^*_i) \in \mathbb{R}^{n+1}, i = 1, \dots, m$ und $a_j = \sum_{i=1}^{m} x^0_{ij}$ für $j = 1, \dots, n$. Dann ist $(x^*_1, \dots, x^*_m)$ zusammen mit S genau dann ein Marktgleichgewicht, wenn Vektoren $z^*_i = (z^*_{i1}, \dots, z^*_{in})$ derart existieren, dass gilt:

(i) *z^*_i löst das Problem $\overline{P}'_i(S)$ für $i = 1, \dots, m$,*

(ii) *$s_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} z^*_{ij}}{a_j}$ für $j = 1, \dots, n$,*

(iii) *$x^*_{ij} = \frac{z^*_{ij}}{s_j}$ für $i = 1, ..., m$ und $j = 1, \dots, n$,*

(iv) *$x^*_{i0} = w_i(S) - \sum_{j=1}^{n} s_j x^*_{ij}$ für $i = 1, \dots, m$.*

Beweis. $(\Leftarrow)$: Für $i = 1, \dots, m$ sei z^*_i derart, dass (i) bis (iv) gelten. Nach Voraussetzung ist $S > 0$ und es gilt für x^*_i definiert wie in (iii)

$$\sum_{i=1}^{m} x^*_{ij} \overset{\text{(iii)}}{=} \sum_{i=1}^{m} \frac{z^*_{ij}}{s_j} \overset{\text{(ii)}}{=} a_j \text{ für } j = 0, 1, \dots, n.$$

Da $\overline{P}'_i(S)$ und $\overline{P}_i(S)$ äquivalent sind und $x^*_i \geq 0$ wegen $z^*_i \geq 0$ und $S > 0$ gilt, ist wegen (i) x^*_i Lösung von $\overline{P}_i(S)$. Außerdem ist für das gemischte Portfolio (x^*_{i0}, x^*_i) wegen (iv) die Selbstfinanzierungsbedingung (3.1) erfüllt. Also ist $(x^*_1, \dots, x^*_m)$ zusammen mit S ein Marktgleichgewicht.
$(\Rightarrow)$: Für $i = 1, \dots, m$ sei x^*_i Lösung von $\overline{P}_i(S)$, welche zusammen mit $S > 0$ ein Marktgleichgewicht bilden. Dann gilt bereits (iv) durch die Selbstfinanzierungsbedingung (3.1). Es folgt für z^*_i mit $z^*_{ij} = s_j x^*_{ij}$ für $j = 0, 1, \dots, n$ zunächst $z^*_i \geq 0$ und damit wegen der Äquivalenz der Probleme $\overline{P}_i(S)$ und $\overline{P}'_i(S)$, dass z^*_i Lösung von $\overline{P}'_i(S)$ ist. Also gelten (i) und (iii). Wegen der Definition 3.4 (iii) des Marktgleichgewichts gilt auch (ii), denn es ist

$$a_j \overset{3.4(iii)}{=} \sum_{i=1}^{m} x^*_{ij} \overset{(ii)}{=} \sum_{i=1}^{m} \frac{z^*_{ij}}{s_j} \text{ für } j = 1, \dots, n.$$

□

Wir erinnern an die Menge

$$M_i(S) := \left\{ \Delta_i^* \in \mathbb{R} \,\middle|\, \Delta_i^* \in \arg\max_{\Delta_i \geq 0} U(w_i(S)(1+R_0) + \Delta_i, \Delta_i \cdot \overline{d}_i) \right\},$$

wobei $\overline{d}_i = d_i^*(1)$ der einfache Abweichungswert ist. Nach Lemma 2.39 ist $M_i(S)$ für $S \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ ein nichtleeres, kompaktes Intervall in $(0, \infty)$. Aus dem ersten Charakterisierungssatz 3.5 für Marktgleichgewichte ergibt sich zusammen mit Lemma 2.37 und 2.38 über den Zusammenhang zwischen Optimallösungen von $\overline{P}_i'(S), \overline{P}_i''(S)$ und $\mathcal{P}_i(\Delta_i)$ (siehe Seite 36 und 38) folgender zentraler Charakterisierungssatz für Gleichgewichte.

Satz 3.6 (Zentraler Charakterisierungssatz für Marktgleichgewichte)
Sei $a_j > 0$ die Gesamtzahl der Aktien eines riskanten Assets $j \in \{1, \ldots, n\}$.

(a) *Sei $S = (1, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann gibt es genau dann ein Marktgleichgewicht unter dem Preisvektor S, wenn die Gleichungen*

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta_i^* \overline{z}_{ij} = s_j a_j \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

durch eine Wahl von Vektoren $\overline{z}_i \in Z_i^*(1)$, die Folgerung 3.2 (b) *erfüllen, und Werten $\Delta_i^* \in M_i(S)$ gelöst werden können.*

(b) *Es existiert genau dann ein Marktgleichgewicht, wenn Werte Δ_i^* derart existieren, dass für eine Wahl von $\overline{z}_i \in Z_i^*(1)$, die* Folgerung 3.2 (b) *erfüllen, unter den durch*

$$s_j := \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i^* \overline{z}_{ij}}{a_j} \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

definierten Preisen $\Delta_i^* \in M_i(S)$ gilt.

(c) *Seien $x_i^* \in \mathbb{R}^n$ für $i = 1, \ldots, m$ und $S = (1, s_1, \ldots, s_n)$ derart, dass $(x_1^*, \ldots, x_m^*)$ zusammen mit S ein Marktgleichgewicht ist. Dann gelten für $\overline{z}_{ij} \in Z_i^*(1)$ und $\Delta_i^* \in M_i(S)$, die für den Preisvektor S die Bedingung in (a) erfüllen,*

$$x_{ij}^* = f_{ij} a_j \text{ mit } f_{ij} = \frac{\Delta_i^* \overline{z}_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} \Delta_i^* \overline{z}_{ij}} \geq 0 \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

und

$$x_{i0}^* = w_i(S) - \sum_{j=1}^{n} \Delta_i^* \overline{z}_{ij} \textit{ für } i = 1, \ldots, m.$$

Beweis.
Zu (a):
($\Rightarrow$) Sei $(x_1^*, ..., x_m^*)$ zusammen mit $S = (1, s_1, \ldots, s_n)$ ein Marktgleichgewicht. Dann existiert nach erstem Charakterisierungssatz 3.5 (i)-(iii) für jedes $i = 1, ..., m$ eine Lösung z_i^* von $\overline{P}_i'(S)$ mit

$$z_{ij}^* = s_j x_{ij}^* \qquad \textit{und} \qquad s_j a_j = \sum_{i=1}^{m} z_{ij}^* \qquad \text{für alle } j = 1, ..., n.$$

Nach Lemma 2.37 über den Zusammenhang von $\overline{P}_i'(S)$ und $\overline{P}_i''(S)$ existieren $\Delta_i^* \geq 0$, sodass (Δ_i^*, z_i^*) für $i = 1, \ldots, m$ Lösung von $\overline{P}_i''(S)$ ist. Nach Lemma 2.38 über den Zusammenhang von $\overline{P}_i''(S)$ und $\mathcal{P}_i(\Delta_i)$ gilt $\Delta_i^* \in M_i(S)$ und es existieren für jedes $i = 1, ..., m$ dann auch $\overline{z}_i \in Z_i^*(1)$ mit $z_i^* = \Delta_i^* \cdot \overline{z}_i$. Also gilt insgesamt

$$s_j a_j = \sum_{i=1}^{m} z_{ij}^* = \sum_{i=1}^{m} \Delta_i^* \cdot \overline{z}_{ij}, \quad j = 1, ..., n. \tag{$*$}$$

Da $(S, x_1^*, ..., x_m^*)$ ein Marktgleichgewicht ist, ist $s_j > 0$ für alle $j = 1, ..., n$. Es gilt aber auch $a_j > 0$ für alle $j = 1, ..., n$ und wegen Lemma 2.39 über die Eigenschaften von $M_i(S)$ gilt $\Delta_i^* > 0$ für alle $i = 1, ..., m$. Damit muss es wegen $(*)$ für alle j ein i geben mit $\overline{z}_{ij} > 0$. Also erfüllt $\overline{z}_i$ Folgerung 3.2 (b) und daraus folgt die Behauptung.

($\Leftarrow$) Seien $\overline{z} \in Z_i^*(1)$, gemäß Folgerung 3.2 (b) gewählt, und $\Delta_i^* \in M_i(S)$ für $i = 1, \ldots m$ derart, dass

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta_i^* \overline{z}_{ij} = s_j a_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

gelten. Dann ist für jedes i nach Lemma 2.38 $z_i^* := \Delta_i^* \overline{z}_i \in Z_i^*(\Delta_i^*)$ Lösung von $\overline{P}_i'$. Da $\overline{z}_i$ Folgerung 3.2 (b) erfüllt sowie $\Delta_i^* > 0$ wegen Lemma 2.39 gilt, gibt es zu jedem $j \in \{1, \ldots, n\}$ ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $z_{ij}^* > 0$. Damit gilt wegen $a_j > 0$

für alle j

$$s_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} z_{ij}^*}{a_j} \text{ für } j = 1, \dots, n,$$

also gilt insbesondere $S > 0$. Wir setzen wieder

$$x_{ij}^* = \frac{z_{ij}^*}{s_j} \text{ für } j = 1, \dots, n$$
$$x_{i0}^* = w_i(S) - \sum_{j=1}^{n} s_j x_{ij}^*$$

für $i = 1, \dots, m$. Dann ist $(x_1^*, \dots, x_m^*)$ zusammen mit S gemäß Satz 3.5 ein Marktgleichgewicht.

Zu (b):
($\Rightarrow$) Sei $(x_1^*, \dots, x_m^*)$ zusammen mit einem Preisvektor $S > 0$ ein Marktgleichgewicht. Dann existieren nach (a) $\overline{z}_i \in Z_i^*(1)$, die Folgerung 3.2 (b) erfüllen, und $\Delta_i^* \in M_i(S)$ für $i = 1, \dots m$ derart, dass

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta_i^* \overline{z}_{ij} = s_j a_j, \qquad j = 1, \dots, n$$

gelten. Division von $a_j > 0$ liefert dann die Behauptung, dass der Preisvektor

$$s_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i^* \overline{z}_{ij}}{a_j} \text{ für } j = 1, \dots, n$$

erfüllt.

($\Leftarrow$) Sei S der Preisvektor, der für $\Delta_i^* \in \mathbb{R}$ und eine Wahl von $\overline{z}_i \in Z_i^*(1)$ für $i = 1, \dots, m$, die wie in Folgerung 3.2 (b) gewählt werden können, definiert ist durch

$$s_j := \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i^* \overline{z}_{ij}}{a_j} \text{ für } j = 1, \dots, n$$

sodass $\Delta_i^* \in M_i(S)$ gilt. Dann ist nach Multiplikation mit $a_j > 0$ die Bedingung aus (a) erfüllt und es gibt ein Marktgleichgewicht unter diesem Preisvektor S.

Zu (c): Es bezeichne $(x_1^*, ..., x_m^*)$ zusammen mit S ein Marktgleichgewicht. Dann ist $S > 0$ und nach dem ersten Charakterisierungssatz 3.5 (iii) existiert für jedes $i = 1, ..., m$ eine Lösung $z_i^* \geq 0$ von $\overline{P}_i'(S)$, sodass $s_j x_{ij}^* = z_{ij}^*$ für alle $j = 1, ..., n$ gilt. Dann existiert nach Lemma 2.35 zusammen mit Lemma 2.36 ein $\overline{z}_i \in Z_i^*(1)$ und ein $\Delta_i^* \in M_i(S)$ mit $z_i^* = \Delta_i^* \overline{z}_i$ ist Lösung von $\mathcal{P}_i(\Delta_i^*)$. Dann folgt aus dem ersten Charakterisierungssatz 3.5 (iv)

$$x_{i0}^* = w_i(S) - \sum_{j=1}^n s_j x_{ij}^* = w_i(S) - \sum_{j=1}^n \Delta_i^* \overline{z}_{ij}.$$

Es ist dann mit (a) für $j = 1, ..., n$ aber auch

$$x_{ij}^* = \frac{z_{ij}^*}{s_j} = \frac{\Delta_i^* \overline{z}_{ij}}{s_j} = \frac{\Delta_i^* \overline{z}_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^m \Delta_i^* \overline{z}_{ij}} a_j,$$

wobei $x_{ij}^* \geq 0$ gilt, da x_i^* nach Definition des Marktgleichgewichts Lösung von $\overline{P}_i(S)$ ist. Also gilt die behauptete Darstellung der Portfolios im Gleichgewicht. □

Wir wollen nun für unser Standardbeispiel 1.1 ein Marktgleichgewicht bestimmen, falls es existiert. Im nächsten Abschnitt werden wir dann untersuchen, unter welchen Bedingungen wir die Existenz eine Marktgleichgewichtes voraussetzen dürfen.

Beispiel 3.7 (Standardbeispiel)
Wir betrachten zwei Investoren $i = 1, 2$. Die Assets $j = 0, 1$ seien wir bisher mit ihren Renditen aus Beispiel 1.1 *gegeben. Jeder Investor habe nun durch ein gewisses Ausgangsportfolio (x_{i0}^0, x_{i1}^0) mit Preisvektor $S = (1, s_1)$ ein Vermögen*

$$w_i(S) = x_{i0}^0 + s_1 x_{i1}^0 \qquad \text{für } i = 0, 1.$$

Beide Investoren wählen das Abweichungsmaß $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 = \sigma$ und die Nutzenfunktionen

$$U_1(\mu, \delta) = \mu - \delta^2 \qquad \text{bzw.} \qquad U_2(\mu, \delta) = \begin{cases} \mu, & \text{falls } \delta \leq \hat{\delta}_2 \\ -\infty, & \text{sonst} \end{cases},$$

siehe auch Beispiel 2.34 bzw. 2.35. *Für Investor 1 haben wir bereits $\overline{P}_1(S)$ für $S = (1, 1)$ gelöst. Wir lösen das Problem noch einmal für $S = (1, s_1)$ und untersuchen den Einfluss des Preises s_1 auf ein Marktgleichgewicht unter diesen beiden Investoren.*

Investor 1: Wir lösen das Problem $\overline{P}_1(S)$ mit $U_1(\mu,\delta) = U_1(\mathbb{E}(W_1), \mathfrak{D}(W_1))$. Dann ist

$$\mu = (x_{10}^0 + s_1 x_{11}^0)(1+R_0) + s_1 x_{11}(\mathbb{E}(R_1) - R_0) = 2(x_{10}^0 + s_1 x_{11}^0) + s_1 x_{11}$$

und

$$\delta = \sigma(s_1 x_{11} R_1) = \sqrt{\mathbb{E}[(s_1 x_{11} R_1 - \mathbb{E}(s_1 x_{11} R_1))^2]} = s_1 x_{11}\sqrt{\mathbb{E}[(R_1 - 2)^2]} = 2 s_1 x_{11}.$$

Damit lautet das Problem $\overline{P}_1(S)$:

$$U_1\Big(2(x_{10}^0 + s_1 x_{11}^0) + s_1 x_{11},\ 2 s_1 x_{11}\Big) = 2x_{10}^0 + 2 s_1 x_{11}^0 + s_1 x_{11} - 4 s_1^2 x_{11}^2 \longrightarrow \max_{x_{11}\geq 0}!$$

Es ist also das Maximum einer in x_{11} quadratischen Funktion zu bestimmen. Bei dieser handelt es sich grafisch um eine nach unten geöffnete Parabel.
Fall 1: Für $s_1 \leq 0$ nimmt diese wegen $x_{11} \geq 0$ ihr Maximum in $x_{11}^* = 0$ an.
Fall 2: Für $s_1 > 0$ wird das Maximum durch die notwendige Bedingung

$$-8 s_1^2 x_{11}^* + s_1 = 0$$

bestimmt als $x_{11}^* = \frac{1}{8s_1}$. Die hinreichende Bedingung lautet $-16 s_1 < 0$ und ist für $s_1 > 0$ erfüllt. Damit erhalten wir das optimale gemischte Portfolio (x_{10}^*, x_{11}^*) durch

$$x_{10}^* = w_1(S) - s_1 x_{11}^* = w_1(S) - \frac{1}{8}$$

als $\Big(w_1(S) - \frac{1}{8}, \frac{1}{8s_1}\Big)$.

Investor 2: Wir lösen $\overline{P}_2(S)$ mit $U_1(\mu,\delta) = U_1(\mathbb{E}(W_1), \mathfrak{D}(W_1))$. Dann ist mit gleicher Rechnung wie oben

$$\mu = 2(x_{20}^0 + s_1 x_{21}^0) + s_1 x_{21} \qquad \text{und} \qquad \delta = \sigma(s_1 x_{21} R_1) = 2 s_1 x_{21}.$$

Wir suchen unter $x_{21} \geq 0$ das Maximum von

$$U_2(2x_{20}^0 + 2 s_1 x_{21}^0 + s_1 x_{21}, 2 s_1 x_{21}) = \begin{cases} 2x_{20}^0 + 2 s_1 x_{21}^0 + s_1 x_{21}, & \text{falls } 2 s_1 x_{21} \leq \hat{\delta}_2 \\ -\infty, & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei der Abweichungsdeckel $\hat{\delta}_2 := 4$ sei.

Fall 1: Für $s_1 \leq 0$ ist offenbar $x_{21}^* = 0$ optimal.
Fall 2: Für $s_1 > 0$ kommen für Maximalstellen von U_2 nur x_{21} mit

$$x_{21} \leq \frac{\overline{\delta}_2}{2s_1} = \frac{2}{s_1}$$

in Frage, da sonst $U_2 = -\infty$ gilt. Also ist die Aufgabe äquivalent zu

$$\begin{aligned} 2x_{20}^0 + 2s_1x_{21}^0 + s_1x_{21} &\longrightarrow \max! \\ 0 \leq & x_{21} \leq \frac{2}{s_1}. \end{aligned}$$

Damit ist offensichtlich $x_{21}^* = \frac{2}{s_1}$ optimal. Das optimale gemischte Portfolio ergibt sich wie bei Investor 1 als $(x_{20}^*, x_{21}^*) = \left(w_2(S) - 2, \frac{2}{s_1}\right)$.

Nun geben wir beispielhaft je ein konkretes gemischtes Ausgangsportfolio für die Investoren vor. Es seien

$$(x_{10}^0, x_{11}^0) = \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) \qquad \text{und} \qquad (x_{20}^0, x_{21}^0) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right).$$

Dann ist die verfügbare Menge an Asset 1

$$a_1 = x_{11}^0 + x_{21}^0 = \frac{17}{8}.$$

Nun fragen wir uns, wie der Preisvektor $S = (1, s_1)$ durch den Markt gegeben sein muss, damit er zusammen $(x_{11}^*, x_{21}^*) = \left(\frac{1}{8s_1}, \frac{2}{s_1}\right)$ ein Marktgleichgewicht bildet. Wir haben gesehen, dass für $s_1 \leq 0$ beide Investoren ihr Vermögen in das sichere Asset hineinstecken. Damit kann sich kein Marktgleichgewicht im Sinne unserer Definition einstellen, da die gehandelten Mengen am Asset $j = 1$ nicht die gleichen sind, wie nach (iii) *in der Definition eines Gleichgewichts vorgeschrieben wird. Wir lösen also für $s_1 > 0$*

$$a_1 = x_{11}^* + x_{21}^* = \frac{1}{8s_1} + \frac{2}{s_1} = \frac{17}{8s_1}.$$

und erhalten $s_1^* = 1$. Damit ergeben sich mit dem Preisvektor $S^* = \left(1, \frac{17}{2}\right)$ nun rückblickend

$$w_1(S^*) = \frac{7}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} = 1 \qquad w_2(S^*) = \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{5}{4} = 2$$

und die optimalen gemischten Portfolios

$$(x_{10}^*, x_{11}^*) = \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) \qquad\qquad (x_{20}^*, x_{21}^*) = (0,2)\,,$$

die für Investor 1 einen maximalen Nutzen von

$$\begin{aligned}\max U_1 &= 2x_{10}^0 + 2s_1^* x_{11}^0 + s_1^* x_{11}^* - 4(s_1^* x_{11}^*)^2 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{7}{8}\right) + 1 \cdot \frac{1}{8} - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \\ &= \frac{33}{16}\end{aligned}$$

und für Investor 2 wegen $2s_1^* x_{21}^* = 4 \leq \overline{d}_2 = 4$ *einen maximalen Nutzen von*

$$\max U_2 = 2\left(x_{20}^0 + s_1^* x_{21}^0\right) + s_1^* x_{21}^* = 2 \cdot \left(\frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{5}{4}\right) + 1 \cdot 2 = 6$$

liefern. Während der Investor 1 sein gemischtes Portfolio mehr zur sicheren Anlage $j = 0$ *hin umschichtet, steckt Investor 2 sein gesamtes Vermögen in das riskante Asset* $j = 1$. *Durch die Handelsstrategie im Gleichgewicht kann das der Investor 2 auch tun, denn: Investor 1 gibt* $\frac{6}{8}$ *der ursprünglichen in seinem gemischten Ausgangsportfolio gehaltenen* $\frac{7}{8}$ *Einheiten am Asset 1 durch seine Umschichtung auf den Markt frei, die der Investor 2 in sein Portfolio aufnehmen kann und statt* $\frac{5}{4}$ *nun* $\frac{16}{8} = 2$ *Einheiten besitzt. Um die Selbstfinanzierungsbedingung zu erhalten, muss er dafür* $1 \cdot \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ *Einheiten am sicheren Asset* $j = 0$ *aus seinem Portfolio entfernen, welche gerade der Investor 1 in sein Portfolio aufnehmen will. Dadurch entsteht die Gleichgewichtssituation, in der die gehandelten (riskanten) Assetmengen* a_j *die gleichen sind.*

3.2. Existenzsätze

Wir wollen nun ein Fixpunktargument aufstellen, um die Existenz von Gleichgewichten nachzuweisen. Wir betrachten zunächst einen Spezialfall: es gelte

$$M_i(S_1) = M_i(S_2) \text{ für alle } S_1, S_2 \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dann ist die Menge $M_i(S)$ unabhängig von S und wir schreiben nur M_i. Für diesen Fall ist die Bedingung (b) im zentralen Charakterisierungssatz 3.6 stets erfüllt und es existiert ein Marktgleichgewicht. Das halten wir in folgendem Satz fest:

Satz 3.8 (Existenzsatz für Gleichgewichte unter $M_i = M_i(S)$)
Sei $M_i \subseteq \mathbb{R}_+$. *Dann existiert für jedes* $\Delta_i^* \in M_i$ *und jedes* $\overline{z}_i \in Z_i^*(1),\ i = 1, ..., m$, *welches* Folgerung 3.2 (b) *erfüllt, zu dem durch*

$$s_j := \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i^* \overline{z}_{ij}}{a_j}$$

definierten Preisvektor ein Marktgleichgewicht.

Beweis. Seien $\Delta_i^* \in M_i$ und $\overline{z}_i \in Z_i^*(1)$ für $i = 1, \ldots, m$ beliebig. Der Preisvektor S werde definiert durch

$$s_j := \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i^* \overline{z}_{ij}}{a_j}.$$

Dann existiert nach Satz 3.6 (b) ein Marktgleichgewicht, da unabhängig vom konkreten Preisvektor S gilt: $\Delta_i^* \in M_i$. □

Dieser Spezialfall von S unabhängigen Mengen $M_i = M_i(S)$ findet sich nach Rockafellar et al. bei den betrachteten Beispielen 2.34 und 2.35 von Nutzenfunktionen in Abschnitt 2.3 wieder. Wir wollen das an dieser Stelle überprüfen:

Beispiel 3.9 (vgl. Beispiel 2.34)
Wir betrachten einen Markt mit Preisvektor $S = (1, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *und die nichtlineare Nutzenfunktion*

$$U_i(\mu_i, \delta_i) = \mu_i - \lambda_i \delta_i^{q_i} \ \textit{mit}\ \lambda_i \geq 0, q_i > 1,$$

die alle Annahmen (U1) - (U5) *erfüllt. Dann lautet* $\overline{P}_i(S)$, *wo* $\mu_i = \mathbb{E}(W_i)$ *und* $\delta_i = \mathfrak{D}_i(W_i)$ *ist,*

$$\mathbb{E}(W_i) - \lambda_i \mathfrak{D}_i(W_i)^{q_i} \to \max!$$

mit

$$W_i := W(x_{i0}, x_i) = x_{i0}(1 + R_0) + \sum_{j=1}^{n} s_j x_{ij}(1 + R_j).$$

Also lautet das Problem

$$w_i(S)(1 + R_0) + \sum_{j=1}^{n} s_j x_{ij}(\mathbb{E}(R_j) - R_0) - \lambda_i \mathfrak{D}_i \left(\sum_{j=1}^{n} s_j x_{ij} R_j \right)^{q_i} \to \max_{x \geq 0}!$$

unter der Budgetbeschränkung

$$x_{i0} = w_i(S) - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} s_j .$$

Dann ist $M_i(S)$ *unabhängig von* S*, denn es ist*

$$\begin{aligned} M_i(S) &= \left\{ \Delta_i^* \in \mathbb{R} | \Delta_i^* \in \arg\max_{\Delta_i \in \mathbb{R}} U_i \left(w_i(S)(1+R_0) + \Delta_i, \Delta_i \cdot \overline{d}_i \right) \right\} \\ &= \left\{ \Delta_i^* \in \mathbb{R} | \Delta_i^* \in \arg\max_{\Delta_i \in \mathbb{R}} (w_i(S)(1+R_0) + \Delta_i - \lambda_i(\Delta_i \cdot \overline{d}_i)^{q_i}) \right\} \\ &= \left\{ \Delta_i^* \in \mathbb{R} | \Delta_i^* \in \arg\max_{\Delta_i \in \mathbb{R}} \Delta_i - \lambda_i(\Delta_i \cdot \overline{d}_i)^{q_i}) \right\} =: M_i. \end{aligned}$$

Dann ist $\Delta_i^* \in M_i$ *genau dann, wenn* $\Delta_i^* > 0$ *und*

$$1 - q_i \lambda_i (\Delta_i^*)^{q_i - 1} \overline{d}_i^q = 0 \tag{3.2}$$

gelten. Also ist

$$\Delta_i^* = \frac{1}{\sqrt[(q_i-1)]{q_i \lambda_i \delta_i^{q_i}}} \text{ für } i = 1, ..., m.$$

Wählen alle Investoren diese nichtlineare Nutzenfunktion U_i*, so existiert nach* Satz 3.8 *ein Gleichgewicht, welches für jede Wahl von Vektoren* $\overline{z}_i \in Z_i^*(1)$*, das* Folgerung 3.2 (b) *erfüllt, durch* Satz 3.6 *gegeben ist mit* $\Delta_i^* \in M_i$ *wie in* (3.2) *gegeben.*

Beispiel 3.10 (vgl. Beispiel 2.35)
Wir betrachten einen Markt mit Preisvektor $S = (1, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *und für festgelegte obere Abweichungskappen* $\hat{\delta}_i > 0$ *die Nutzenfunktionen*

$$U_i(\mu_i, \delta_i) = \begin{cases} \mu_i, & \text{falls } \delta_i \leq \hat{\delta}_i, \\ -\infty, & \text{sonst} \end{cases},$$

welche alle Annahmen (U1) - (U5) *unabhängig der Größe von* $\overline{\delta}_i$ *erfüllt. In diesem Fall löst der Investor*

$$\mathbb{E}(W_i) = w_i(S)(1+R_0) + \sum_{j=1}^{n} s_j x_{ij} (\mathbb{E}(R_j) - R_0) \to \max_{x \geq 0}!$$

unter der Budgetbeschränkung

$$x_{i0} = w_i(S) - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} s_j$$

und der Abweichungskappe $\mathfrak{D}_i(R_i) \leq \hat{\delta}_i$.

Dann ist $M_i(S)$ *unabhängig von* S, *denn es ist wegen* $\overline{\delta}_i > 0$

$$\begin{aligned}
M_i(S) &= \left\{\Delta_i^* \in \mathbb{R} | \Delta_i^* \in \arg\max_{\Delta_i \in \mathbb{R}} U_i \left(w_i(S)(1+R_0) + \Delta_i, \Delta_i \cdot \overline{d}_i\right)\right\} \\
&= \left\{\Delta_i^* \in \mathbb{R} \middle| \Delta_i^* \in \arg\max_{\Delta_i \in \mathbb{R}} \left\{ \begin{array}{ll} w_i(S)(1+R_0) + \Delta_i, & \textit{falls } \Delta_i \cdot \overline{\delta}_i \leq \hat{\delta}_i, \\ -\infty, & \textit{sonst} \end{array} \right. \right\} \\
&= \left\{\Delta_i^* \in \mathbb{R} \middle| \Delta_i^* \in \arg\max_{\Delta_i \leq \frac{\hat{\delta}_i}{\overline{\delta}_i}} (w_i(S)(1+R_0) + \Delta_i) \right\} \\
&= \left\{\Delta_i^* \in \mathbb{R} \middle| \Delta_i^* \in \arg\max_{\Delta_i \leq \frac{\hat{\delta}_i}{\overline{\delta}_i}} \Delta_i \right\} =: M_i.
\end{aligned}$$

Damit ist $\Delta_i^* \in M_i$ *genau dann, wenn*

$$\Delta_i^* = \frac{\hat{\delta}_i}{\overline{\delta}_i} \textit{ für } i = 1, ..., m. \tag{3.3}$$

gilt und damit auch $\Delta_i^* > 0$. *Wählen alle Investoren diese nichtlineare Nutzenfunktion* U_i, *so existiert nach* Satz 3.8 *ein Gleichgewicht, welches für jede Wahl von Vektoren* $\overline{z}_i \in Z_i^*(1)$, *das* Folgerung 3.2 (b) *erfüllt, durch* Satz 3.6 *gegeben ist mit* $\Delta_i^* \in M_i$ *wie in* (3.3) *gegeben.*

Komplizierter wird es, die Erfüllbarkeit der Bedingungen in Satz 3.6 für die Existenz eines Gleichgewichts zu untersuchen, wenn $M_i(S)$ abhängig vom Preisvektor ist. Unser Ziel ist es jetzt einen Existenzsatz für diesen allgemeinen Fall von S abhängigen Mengen $M_i(S)$ zu formulieren. Das führt auf einen Ansatz über Fixpunkte von mengenwertigen Abbildungen. Wir werden dazu einige neue Bezeichnungen einführen und verweisen daher für ein etwaiges Nachschlagen auf das Symbolverzeichnis in Anhang C.

Wir wissen, dass $S = (1, s_1, \dots, s_n)$ für ein Marktgleichgewicht nach Satz 3.6 die Bedingung

$$s_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i^* \overline{z}_{ij}}{a_j} \text{ für } j = 1, \dots, n$$

für gewisse $\Delta_i^* \in \mathbb{R}$ und $\overline{z}_i \in Z_i^*(1)$ erfüllen muss. Wir wollen ermitteln, welche Forderungen das an Δ_i^* und $\overline{z}_i$ für die Lösbarkeit des Systems stellt. Für alle $i = 1, ..., m$ beschreiben die Anteile

$$f_{ij} = \frac{x_{ij}}{a_j}, \quad j = 1, ..., n$$

die Haltungen der Investoren. Dann ist wegen der Selbstfinanzierungsbedingung das in $t = 0$ ursprüngliche Vermögen des Investors i bezüglich des Preisvektors S mit Darstellung wie oben

$$w_i(S) = x_{i0} + \sum_{j=1}^{n} s_j x_{ij} = x_{i0} + \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \cdot \sum_{k=1}^{m} \Delta_k^* \cdot \overline{z}_{kj}.$$

Das beschreibt einen Zusammenhang zwischen optimaler Anlagestrategie und Ausgangsvermögen. In dieser Schreibweise ist

$$\Delta_i^* \in M_i(S) = \left\{ \Delta_i' \in \mathbb{R} \middle| \Delta_i' \in \arg\max_{\Delta_i \geq 0} U(w_i(S)(1+R_0) + \Delta_i, \Delta_i \cdot \overline{d}_i) \right\}$$

genau dann, wenn

$$\Delta_i^* \in \arg\max_{\Delta_i \geq 0} U_i \left(\left(x_{i0} + \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \cdot \sum_{k=1}^{m} \Delta_k^* \cdot \overline{z}_{kj} \right) (1+R_0) + \Delta_i \ , \ \Delta_i \cdot \overline{d}_i \right) \tag{3.4}$$

gilt. Wir führen die Kurzschreibweisen

$$\begin{aligned} \Delta &:= (\Delta_1, \dots, \Delta_m), & \Delta^* &:= (\Delta_1^*, \dots, \Delta_m^*), \\ \overline{z} &:= (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_m), & Z^*(1) &:= Z_1^*(1) \times \dots \times Z_m^*(1) \end{aligned}$$

ein. Außerdem setzen wir

$$a_{i,\overline{z}} := \left(\sum_{j=1}^{n} f_{ij} \cdot \overline{z}_{1j} \ , ... \ , \ \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \cdot \overline{z}_{mj} \right).$$

Damit definieren wir die Funktion

$$\overline{U}_{i,\overline{z}}(\Delta^*, \Delta_i) := U_i \left((x_{i0} + \Delta^* a_{i,\overline{z}}^T)(1+R_0) + \Delta_i, \ \Delta_i \cdot \overline{d}_i \right)$$

mit $\Delta^* \in \mathbb{R}^m$ und $\Delta_i \geq 0$. Diese ist konvex auf $\mathbb{R}^m \times [0, \infty)$, denn es gilt für $\lambda \in [0,1]$ wegen der Konvexität von U_i

$$\begin{aligned}
&\overline{U}_{i,\overline{z}}(\lambda\Delta_1^* + (1-\lambda)\Delta_2^*,\ \lambda\Delta_i^1 + (1-\lambda)\Delta_i^2) \\
&= U_i\Big((x_{i0}+(\lambda\Delta_1^*+(1-\lambda)\Delta_2^*)a_{i,\overline{z}}^T)(1+R_0)+\lambda\Delta_i^1+(1-\lambda)\Delta_i^2, \\
&\qquad \lambda\Delta_i^1+(1-\lambda)\Delta_i^2\overline{d}_i\Big) \\
&= U_i\Big((\lambda x_{i0}+(1-\lambda)x_{i0}+(\lambda\Delta_1^*+(1-\lambda)\Delta_2^*)a_{i,\overline{z}}^T)(1+R_0)+\lambda\Delta_i^1+(1-\lambda)\Delta_i^2, \\
&\qquad \lambda\Delta_i^1+(1-\lambda)\Delta_i^2\overline{d}_i\Big) \\
&= U_i\Big(\lambda\left((x_{i0}+\Delta_1^* a_{i,\overline{z}}^T)(1+R_0)+\Delta_i^1\right)+(1-\lambda)\left((x_{i0}+\Delta_2^* a_{i,\overline{z}}^T)(1+R_0)+\Delta_i^2\right), \\
&\qquad \lambda(\Delta_i^1\overline{d}_i)+(1-\lambda)(\Delta_i^2\overline{d}_i)\Big) \\
&\overset{(U1)}{\leq} \lambda U_i\left((x_{i0}+\Delta_1^* a_{i,\overline{z}}^T)(1+R_0)+\Delta_i^1,\ \Delta_i^1\cdot\overline{d}_i\right) \\
&\qquad + (1-\lambda)U_i\left((x_{i0}+\Delta_2^* a_{i,\overline{z}}^T)(1+R_0)+\Delta_i^2,\ \Delta_i^2\cdot\overline{d}_i\right) \\
&= \lambda\overline{U}_{i,\overline{z}}(\Delta_1^*, \Delta_i^1) + (1-\lambda)\overline{U}_{i,\overline{z}}(\Delta_2^*, \Delta_i^2).
\end{aligned}$$

Weiterhin ist $\overline{U}_{i,\overline{z}}(\Delta^*, \Delta_i)$ oberhalbstetig auf $\mathbb{R}^m \times [0,\infty)$, denn für Folgen

$$\left(\Delta^{*k}, \Delta_i^k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ mit } \left(\Delta^{*k}, \Delta_i^k\right) \longrightarrow (\Delta^*, \Delta_i) \text{ für } k \to \infty$$

ist

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\in\mathbb{N}} \overline{U}_{i,\overline{z}}(\Delta^{*k}, \Delta_i^k) &= \limsup_{k\in\mathbb{N}} U_i\left(\underbrace{(x_{i0}+\Delta^{*k}a_{i,\overline{z}}^T)(1+R_0)+\Delta_i^k}_{=:\mu_k},\ \underbrace{\Delta_i^k\cdot\overline{d}_i}_{=:\delta_k}\right) \\
&= \limsup_{k\in\mathbb{N}} U_i(\mu_k, \delta_k)
\end{aligned}$$

mit Folgen $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\infty)$. Für diese gilt:

$$\begin{aligned}
\mu_k &\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu := (x_{i0}+\Delta^* a_{i,\overline{z}}^T)(1+R_0)+\Delta_i \\
\delta_k &\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \delta := \Delta_i\cdot\overline{d}_i.
\end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt wegen der Oberhalbstetigkeit von U_i auf $\mathbb{R}\times[0,\infty)$

$$\limsup_{k\in\mathbb{N}} \overline{U}_{i,\overline{z}}(\Delta^{*k}, \Delta_i^k) = \limsup_{k\in\mathbb{N}} U_i(\mu_k, \delta_k) \leq U_i(\mu, \delta) = \overline{U}_{i,\overline{z}}(\Delta^*, \Delta_i)$$

und damit ist $\overline{U}_{i,\overline{z}}$ oberhalbstetig.

$\overline{U}_{i,\overline{z}}(\Delta^*, \Delta_i)$ hat für vorgegebenes Δ^* die Optimalstellenmenge

$$\overline{M}_{i,\overline{z}}(\Delta^*) := \left\{ \Delta_i'^* \middle| \Delta_i'^* \in \arg\max_{\Delta_i \geq 0} \overline{U}_{i,\overline{z}}(\Delta^*, \Delta_i) \right\}.$$

Wir untersuchen für irgendein $\overline{z} \in Z^*(1)$, welches Folgerung 3.2 (b) erfüllt, die mengenwertige Abbildung $\mathcal{M}_{\overline{z}}$, die definiert wird durch

$$\mathcal{M}_{\overline{z}}(\Delta^*) := \{\Delta | \Delta_i \in \overline{M}_{i,\overline{z}}(\Delta^*) \text{ für } i = 1, ..., m\}.$$

Der Graph von $\mathcal{M}_{\overline{z}}$ besteht aus allen (Δ^*, Δ), für die $\Delta \in \mathcal{M}_{\overline{z}}(\Delta^*)$ gilt.

Definition 3.11 $\Delta^* \in \mathbb{R}^m$ *heißt Fixpunkt von der mengenwertigen Abbildung* $\mathcal{M}_{\overline{z}}$, *falls* $\Delta^* \in \mathcal{M}_{\overline{z}}(\Delta^*)$ *gilt.*

Wir wollen nun zeigen, dass die Existenz eines Fixpunktes der mengenwertigen Abbildung $\mathcal{M}_{\overline{z}}$ die Existenz eines Gleichgewichts impliziert.

Satz 3.12 (Existenzsatz für Gleichgewichte unter Fixpunkten von $\mathcal{M}_{\overline{z}}$)
Existiert ein $\overline{z} \in Z^*(1)$, *sodass* Folgerung 3.2 (b) *erfüllt ist und* $\mathcal{M}_{\overline{z}}$ *einen Fixpunkt* $\Delta^* \geq 0$ *besitzt, so existiert ein Marktgleichgewicht.*

Beweis. Sei $\overline{z} \in Z^*(1)$ und $\Delta^* \geq 0$ Fixpunkt von $\mathcal{M}_{\overline{z}}$, dann gilt $\Delta^* \in \mathcal{M}_{\overline{z}}(\Delta^*)$ mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\overline{z}}(\Delta^*) &= \left\{ \Delta | \forall i = 1, ..., m : \Delta_i \in \arg\max_{\Delta_i' \geq 0} \overline{U}_{i,\overline{z}}(\Delta^*, \Delta_i') \right\} \\
&\overset{(3.12)}{=} \left\{ \Delta | \forall i : \Delta_i \in \arg\max_{\Delta_i' \geq 0} U_i \left((x_{i0} + \Delta^* a_{i,\overline{z}}^T)(1 + R_0) + \Delta_i', \Delta_i' \cdot \overline{d}_i \right) \right\} \\
&\overset{(3.11)}{=} \left\{ \Delta | \forall i : \Delta_i \in \arg\max_{\Delta_i' \geq 0} U_i \left(\left(x_{i0} + \sum_{j=1}^n f_{ij} \sum_{k=1}^m \Delta_k^* \overline{z}_{kj} \right) (1 + R_0) + \Delta_i', \Delta_i' \overline{d}_i \right) \right\}
\end{aligned}$$

Damit ist wegen

$$w_i(S) = x_{i0} + \sum_{j=1}^n f_{ij} \cdot \sum_{k=1}^m \Delta_k^* \cdot \overline{z}_{kj}$$

gerade $\Delta_i^* \in M_i(S)$ für alle $i = 1, ..., m$ mit Preisvektor S, der nach vorangehender Bemerkung zu (3.4) gemäß des zentralen Charakerisierungssatzes 3.6 definiert wird durch

$$s_0 = 1, \quad s_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i^* \overline{z}_{ij}}{a_j} > 0 \text{ für } j = 1, .., n, \tag{$*$}$$

wobei $a_j > 0$ die Gesamtzahl der Aktien eines riskanten Assets $j \in \{1, ..., n\}$ ist. Da $\overline{z}_i \in Z_i^*(1)$ Folgerung 3.2 (b) erfüllt, existiert nach Satz 3.6 ein Marktgleichgewicht unter S. $\square$

Wollen wir folglich untersuchen, ob ein Marktgleichgewicht existiert, so genügt es nachzuweisen, dass für ein $\overline{z} \in Z^*(1)$ die mengenwertige Abbildung $\mathcal{M}_{\overline{z}}$ einen Fixpunkt besitzt. Dafür ist es hilfreich, einige Eigenschaften dieser Abbildung zu zeigen. Für den Beweis, der sich an [11] hält, werden Begriffe und Theoreme der konvexen Analysis benötigt, die etwa in [16] und im Anhang A.1 nachgelesen werden können. Außerdem werden wir anstelle von der von Rockafellar et al. verwendeten Begrifflichkeit der *horizon cones* und der darauf angewandten Theoreme hier Rezessionskegel und deren Eigenschaften zur Hilfe nehmen, da wegen der Konvexität der zugrunde liegenden Menge diese Kegel übereinstimmen, vergleiche etwa [16, Seite 82].

Satz 3.13 (Eigenschaften der Abbildung $\mathcal{M}_{\overline{z}}$)
Sei $\overline{z} \in \overline{Z}$ *derart, dass* Folgerung 3.2 (b) *erfüllt ist. Dann hat* $\mathcal{M}_{\overline{z}}$ *folgende Eigenschaften:*

(i) *Für jedes* $\Delta^* \in \mathbb{R}^m$ *ist* $\mathcal{M}_{\overline{z}}(\Delta^*)$ *ist nichtleer, konvex und kompakt in* $\mathbb{R}_+^m$.

(ii) *Der Graph von* $\mathcal{M}_{\overline{z}}$ *ist abgeschlossen.*

(iii) *Es existiert ein* $\rho > 0$*, sodass für alle* $\Delta, \Delta^* \geq 0$ *mit* $\Delta \in \mathcal{M}_{\overline{z}}(\Delta^*)$ *gilt:* $\|\Delta^*\|_\infty \leq \rho \Longrightarrow \|\Delta\|_\infty < \rho$.

Beweis.
Zu (i): Für jedes $i \in \{1, ..., m\}$ ist $\overline{M}_{i,\overline{z}}(\Delta^*)$ nach Lemma 2.39 ein nichtleeres, kompaktes Intervall in $(0, \infty)$, da sich nur die Notation von $w_i(S)$ in $M_i(S)$ zu

$$w_i(S) = x_{i0} + \Delta^* a_{i,\overline{z}}^T$$

geändert hat, wie im Beweis zu Satz 3.12 noch einmal deutlich wurde. Da

$$\mathcal{M}_{\overline{z}}(\Delta^*) = \bigtimes_{i=1}^{m} \overline{M}_{i,\overline{z}}(\Delta^*)$$

gilt, ist diese eine kompakte, konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^m_+$. Damit gilt (i).

Zu (ii): Die Funktionen $\overline{U}_{i,\overline{z}}$ sind oberhalbstetig und konkav auf $\mathbb{R}^m \times [0, \infty)$. Daraus folgt, dass die Optimalwertfunktion

$$\Theta^*_{i,\overline{z}}(\Delta^*) := \max_{\Delta_i \geq 0} \overline{U}_{i,\overline{z}}(\Delta^*, \Delta_i)$$

als Maximum einer konvexen Funktion eine konkave Funktion in $\Delta^* \in \mathbb{R}^m$ ist, welche überall endlich ist, vergleiche etwa [16, Proposition 2.22]. Daher ist $\Theta^*_{i,\overline{z}}(\Delta^*)$ nach Satz A.9 stetig. Es ist weiterhin

$$\Delta_i \in \overline{M}_{i,\overline{z}}(\Delta^*) \Longleftrightarrow \overline{U}_{i,\overline{z}}(\Delta^*, \Delta_i) \geq \Theta^*_{i,\overline{z}}(\Delta^*)$$

und daher

$$\Delta \in \mathcal{M}_{\overline{z}}(\Delta^*) \Longleftrightarrow \overline{U}_{i,\overline{z}}(\Delta^*, \Delta) - \Theta^*_{i,\overline{z}}(\Delta^*) \geq 0 \text{ für } i = 1, ..., m. \tag{3.5}$$

Wegen der Oberhalbstetigkeit von $\overline{U}_{i,\overline{z}}$ und der Stetigkeit von $\Theta^*_{i,\overline{z}}$ ist die Funktion $\overline{U}_{i,\overline{z}} - \Theta^*_{i,\overline{z}}$ oberhalbstetig. Folglich ist die Lösungsmenge des Ungleichungssystems in (3.5) abgeschlossen. Daraus folgt (ii).

Zu (iii): Wir betrachten die Mengen

$$C_i = \{(\mu_i, \delta_i) | U_i(\mu_i, \delta_i) \geq U_i(x_{i0}(1 + R_0), 0)\}$$

Diese Mengen sind konvex wegen der Konvexität von U_i und nach Lemma 2.33 abgeschlossen wegen der Oberhalbstetigkeit von U_i. Wir zeigen zunächst für $\Delta^* \geq 0$

$$\Delta_i \in \overline{M}_{i,\overline{z}}(\Delta^*) \Longrightarrow ((x_{i0} + \Delta^* \cdot a_{i,\overline{z}})(1 + R_0) + \Delta_i, \Delta_i \cdot \overline{\delta}_i) \in C_i. \tag{3.6}$$

Aus $\Delta_i \in \overline{M}_{i,\overline{z}}(\Delta^*)$ folgt wegen $\Delta \geq 0$, dass

$$\begin{aligned} U_i((x_{i0} + \Delta^* \cdot a_{i,\overline{z}})(1 + R_0) + \Delta_i, \Delta_i \cdot \overline{\delta}_i) &\geq U_i((x_{i0} + \Delta^* \cdot a_{i,\overline{z}})(1 + R_0), 0) \\ &\geq U_i((x_{i0}(1 + R_0), 0), \end{aligned}$$

da U_i monoton wachsend in der ersten Komponente ist und

$$\Delta^* \cdot a_{i,\overline{z}}(1 + R_0) \geq 0 \text{ für } \Delta^* \geq 0$$

wegen der Nichtnegativität des Vektors $a_{i,\overline{z}}$ gilt. Also gilt (3.6).
Der Beweis von (iii) erfolgt durch Kontraposition: Angenommen, es gibt Folgen $\{\Delta^{*k}\}_{k=1}^{\infty}$ und $\{\Delta^k\}_{k=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}_+^m$ mit $\Delta^k \in \mathcal{M}_{\overline{z}}(\Delta^{*k})$ für alle $k \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\|\Delta^k\|_\infty \geq \|\Delta^{*k}\|_\infty \to \infty$$

gelten. Dann gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $i \in \{1, ..., m\}$ mit

$$\Delta_i^k \geq \|\Delta^{*k}\|_\infty.$$

Solange es nur endlich viele i gibt können wir annehmen, dass dieses i immer identisch ist, indem wir ggf. zu Teilfolgen übergehen. Daher sei dieses im folgenden $i = 1$. Weiterhin ist wegen $\Delta^k \in \mathcal{M}_{\overline{z}}(\Delta^{*k})$ nach (i) $\Delta^k > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für die Vektoren

$$\tilde{\Delta}^k := \frac{\Delta^{*k}}{\Delta_1^k}$$

gerade $\|\tilde{\Delta}^k\|_\infty \leq 1$. Es gelte weiterhin für die durch diese Vektoren gegebene Folge $\{\tilde{\Delta}^k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\lim_{k \to \infty} \tilde{\Delta}^k = \tilde{\Delta} \in \mathbb{R}_+^m, \tag{3.7}$$

was, falls nötig, durch erneuten Übergang zu Teilfolgen erreicht werden kann. Nun betrachten wir noch einmal (3.6) mit $i = 1$:

$$\Big((x_{10} + \Delta^{*k} \cdot a_{1,\overline{z}})(1 + R_0) + \Delta_1^k, \Delta_1^k \cdot \overline{\delta}_1\Big) \in C_1.$$

Das ist mittels Skalierung durch $\frac{1}{\Delta_1^k}$ nach Minkowski-Rechenregel

$$x \in M \iff \alpha x \in \alpha M \text{ für } M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ konvex }, \alpha > 0$$

äquivalent zu

$$\left(\left(\left(\frac{1}{\Delta_1^k}\right) \cdot x_{10} + \tilde{\Delta}^k \cdot a_{1,\overline{z}}\right)(1 + R_0) + 1, \overline{\delta}_1\right) \in \left(\frac{1}{\Delta_1^k}\right) C_1.$$

Da wegen der Kontrapositionsannahme $\frac{1}{\Delta_1^k} \to 0$ für $k \to \infty$ gilt, folgt durch Grenzwertbildung mittels (3.7) und Satz A.11 über die Darstellung von Rezessionskegeln R_C für nichtleere, abgeschlossene, konvexe Mengen C

$$\Big(\tilde{\Delta} \cdot a_{1,\overline{z}}(1 + R_0) + 1, \overline{\delta}_1\Big) \in R_{C_1}.$$

Da R_{C_1} ein abgeschlossener, konvexer Kegel im $\mathbb{R}^2$ ist, ist das gleichbedeutend mit

$$(1, \tilde{\delta}_1) \in R_{C_1} \text{ für } \tilde{\delta}_1 := \frac{\overline{\delta}_1}{\tilde{\Delta} \cdot a_{1,\overline{z}}(1 + R_0) + 1} > 0. \tag{3.8}$$

Nach Satz A.8 (ii) ist wegen $(\mu_1, 0) \in C_1$ für

$$\mu_1 \geq x_{10}(1 + R_0)$$

die Bedingung $(1, \delta_1) \in R_{C_1}$ mit $\delta_1 \geq 0$ äquivalent zu

$$(\mu_1, 0) + \lambda(1, \delta_1) \in C_1 \text{ für alle } (\mu_1, 0) \in C_1, \lambda > 0.$$

Das ist äquivalent zu

$$U_1(\mu_1 + \lambda, \lambda \cdot \delta_1) \geq U_1(\mu_1, 0) \text{ für alle } \lambda > 0, \text{ falls } \mu_1 \geq x_{10}(1 + R_0). \tag{3.9}$$

Wir wissen nach (3.8). dass diese Bedingung für $\delta_1 = \tilde{\delta}_1$ erfüllt ist. Andererseits erfüllt auch $\delta_1 = 0$ diese Bedingung (3.9) wegen der Monotonie im zweiten Argument von U_1. Aus der Konvexität von R_{C_1} folgt dann

$$(1, \delta_1) \in R_{C_1} \text{ für alle } \delta_1 \in [0, \tilde{\delta}_1].$$

Wir wissen aber aus der Annahme (U5) der Nutzenfunktion, dass (3.9) nicht für jedes $\delta_1 \in (0, \overline{\delta}_1]$ gilt, insofern $\tilde{\delta}_1 > 0$ und $\overline{\delta}_1 > 0$ gilt. Dieser Widerspruch zeigt die Gültigkeit von (iii).

$\square$

Man kann all das bisher Untersuchte als Vorarbeit für die folgenden Theoreme verstehen. Diese werden als verallgemeinerte Existenzaussagen für Marktgleichgewichte die Untersuchungen zu Gleichgewichten abschließen. Zur Übersicht aller unserer getroffenen Annahmen verweisen wir auf Anhang B.

Theorem 3.14
Unter allen unseren Annahmen existiert stets ein Marktgleichgewicht.

Beweis. Sei $\overline{z} \in Z^*(1)$ beliebig derart, dass Folgerung 3.2 (b) erfüllt ist. Weiter sei $\rho > 0$ derart, dass für alle $\Delta, \Delta' \geq 0$ mit $\Delta' \in \mathcal{M}_{\overline{z}}(\Delta)$ gilt:

$$\|\Delta\|_\infty \leq \rho \Longrightarrow \|\Delta'\|_\infty < \rho.$$

Dieses existiert nach Satz 3.13 (iii). Weiter definieren wir

$$D := \{\Delta \in \mathbb{R}^m | \Delta \geq 0,\ \|\Delta\|_\infty \leq \rho\},$$

welche eine kompakte, konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^m_+$ ist. Dann gilt

$$\mathcal{M}_{\overline{z}}(\Delta) \subseteq D \text{ für alle } \Delta \in D.$$

Der Graph von $\mathcal{M}_{\overline{z}}|_{D\times D}$ ist nach Satz 3.13 (ii) abgeschlossen. Weiter sind die Mengen $\mathcal{M}_{\overline{z}}(\Delta)$ nichtleer und konvex nach Satz 3.13 (i). Der Fixpunktsatz von Kakutani (Satz A.23) ist daher anwendbar und liefert ein $\Delta^* \in D$, so dass $\Delta^* \in \mathcal{M}_{\overline{z}}(\Delta^*)$. Daraus folgt wegen Existenzsatz 3.12 die Existenz eines Gleichgewichts. □

Das folgende Theorem trifft eine Aussage über die Gestalt des Vektors $z_i^* \in \mathbb{R}^n$ im Gleichgewicht, der die investierten Geldmengen eines Investors in die riskanten Assets angibt, sowie über die beliebige Auswahl dieser Vektoren für die Existenz eines Gleichgewichts.

Theorem 3.15 *Unter allen unseren Annahmen gelten folgende Aussagen:*

(i) *Ist $(x_1^*, \dots, x_m^*)$ zusammen mit $S = (1, s_1, \dots, s_n)$ ein Marktgleichgewicht, so existieren $\Delta_i^* > 0$ und $\overline{z}_i \in Z_i^*(1)$ für $i = 1, \dots, m$, sodass für die Vektoren $z_i^* \in \mathbb{R}^n$ mit $z_{ij}^* = s_j x_{ij}^*$ für $j = 1, \dots, n$ gilt:*

$$z_i^* \neq 0 \textit{ sowie } z_i^* = \Delta_i^* \cdot \overline{z}_i \geq 0.$$

(ii) *Falls $|Z_i^*(1)| > 1$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt, so existiert unter beliebiger Wahl von $\overline{z}_i \in Z_i^*(1)$ für $i = 1, \dots, m$, die* Folgerung 3.2 (b) *erfüllen, ein Marktgleichgewicht, welches* (i) *mit $\overline{z}_i$ erfüllt.*

Beweis. Zu (i): Nach erstem Charakterisierungssatz 3.5 (i) löst im Gleichgewicht der Vektor $z_i^* \in \mathbb{R}^n$ mit

$$z_{ij}^* = s_j x_{ij}^* \text{ für } j = 1, \dots, n$$

das Problem $\overline{P}'_i(S)$. Nach Lemma 2.37 zusammen mit Lemma 2.38 ist das genau dann der Fall, wenn ein $\overline{z}_i \in Z_i^*(1)$ und ein $\Delta_i^* \in M_i(S)$ existieren mit

$$z_i^* = \Delta_i^* \cdot \overline{z}_i.$$

Dabei gilt aber $\Delta_i^* > 0$ wegen Lemma 2.39. Weiter gilt $\overline{z}_i \neq 0$, denn wegen Annahme (A1) über die risikobehafteten Renditen und $\overline{z}_i \in B_{\mathcal{P}_i(S)}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{z}_{ij} \underbrace{(\mathbb{E}(R_j) - R_0)}_{>0} \geq 1$$

$$z_{ij} \geq 0 \text{ für alle } j = 1, \ldots, n.$$

Also ist $z_i^* \neq 0$ und nichtnegativ. Daraus folgt (i).

Zu (ii): Da im Beweis von Theorem 3.14 $\overline{z} \in Z^*(1)$, das Folgerung 3.2 (b) erfüllt, beliebig gewählt worden ist, existiert ein Marktgleichgewicht $(x_1^*, \ldots, x_m^*)$ zusammen mit Preisvektor $S = (1, s_1, \ldots, s_n)$, wobei S erklärt ist durch

$$s_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_i^* \overline{z}_{ij}}{a_j} > 0 \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

für ein $\Delta_i^* \in M_i(S)$, welches als Fixpunkt von $\mathcal{M}_{\overline{z}}$ gegeben ist. Dabei ist nach dem zentralen Charakterisierungssatz 3.6 (c)

$$x_{ij}^* := \frac{\Delta_i^* \overline{z}_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \Delta_i^* \overline{z}_{ij}} a_j \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

und damit gilt für $z_{ij}^* := s_j x_{ij}^*$ wegen der Definition von S

$$z_{ij}^* = \frac{\Delta_i^* \overline{z}_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \Delta_i^* \overline{z}_{ij}} a_j \cdot s_j = \Delta_i^* \overline{z}_{ij} \geq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m.$$

also $z_i^* = \Delta_i^* \overline{z}_i$. Wie in (i) schlussfolgert man analog $z_i^* \neq 0$. □

3.3. Spieltheoretischer Bezug

In der zugrunde liegenden Arbeit [11] führen Rockafellar et al. ihre Untersuchungen ohne direkten Bezug zur Spieltheorie aus. Offensichtlich gibt es aber eine solche Verbindung. Daher modellieren wir in diesem letzten Abschnitt die betrachtete Konfliktsituation zwischen den Investoren als unendliches, nichtkooperatives m-Personen-Spiel mit konkaver Gewinnfunktion und vollständiger Informationsmenge und stellen damit diesen Bezug zur Spieltheorie her. Wir werden sehen, dass sich die von uns gewählte Definition des Marktgleichgewichts mit der des Nash-Gleichgewichts vereinbaren lässt. Wir verweisen daher auf die Begriffsbildung zur Spieltheorie im Anhang A.4.

Wir modellieren unseren Markt als Spiel $\Gamma = (I, \{\mathfrak{X}_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I})$, wobei

- $I = \{1, \dots, m\}$
- $\mathfrak{X}_i = \{x \in \mathbb{R}^n | x_{ij} \geq 0 \; \forall j = 1, \dots, n\}$
- $H_i(x_1, \dots, x_m) = U_i \left(w(S)(1+R_0) + \sum_{j=1}^n s_j x_{ij}(\mathbb{E}(R_j) - R_0), \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^n s_j x_{ij} R_j \right) \right)$

ist. Ein Spieler $i \in \{1, ..., m\}$ wählt demnach seine Aktion aus dem zulässigen Bereich von $\overline{P}_i(S)$ unter Beachtung der Selbstfinanzierungsbedingung derart, dass die Nutzen-Zielfunktion von $\overline{P}_i(S)$ möglichst große Werte annimmt. Es wird also genau die Optimierungsaufgabe $\overline{P}_i(S)$ beschrieben. S geht in dieses Spiel als Parameter ein. Wie oben bereits erwähnt, können wir das Spiel wie folgt charakterisieren: es handelt sich um ein m-Personen-Spiel mit konkaver Gewinnfunktion, da U_i konkav ist, und unter Abwesenheit von Kooperation. Da die Aktionenmengen unendliche Mengen sind, ist das Spiel unendlich. Außerdem hat jeder Spieler vollständige Informationen über die aktuelle Situation: jeder kennt die Gestalt der Aktionenmengen der anderen Spieler, die Preise, etc.
In diesem Spiel ist eine Situation $(x_1^*, \dots, x_m^*) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \dots \times \mathfrak{X}_m$ für den Spieler i annehmbar, falls gilt

$$\begin{aligned} H_i(x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_m^*) =& U_i(\mathbb{E}(W(x_i^*)), \mathfrak{D}_i(W(x_i^*))) \\ \geq& U_i(\mathbb{E}(W(x_i)), \mathfrak{D}_i(W(x_i))) = H_i(x_1^*, \dots, x_i, \dots, x_m^*), \end{aligned}$$

also genau dann, wenn x_i^* Lösung von $\overline{P}_i(S)$ ist. Dies ist gerade eine der Bedingungen in unserer Definition 3.3 eines Marktgleichgewichts. Es handelt sich dabei also um ein Nash-Gleichgewicht mit zusätzlichen Forderungen, wobei

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = a_j \text{ für alle } j = 1, ..., n$$

als Markträumung in den riskanten Assets gedeutet wird: es kommen keine neuen Mengen auf den Markt und die vorhandenen Assets finden sich auch nach Umstrukturierung in der Menge aller Portfolios wieder.

4. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Diplomarbeit haben wir anhand der Arbeit von Rockafellar et al. [11] die Existenz von Marktgleichgewichten unter einer endlichen Anzahl von riskanten Assets sowie einer sicheren Anlage untersucht. Dabei haben wir Investoren betrachtet, die den Nutzen eines Portfolios an seiner bedingten Auszahlung und seinem Risiko bewertet haben. Das Risiko bestimmte jeder Investor durch sein individuell gewähltes Abweichungsmaß.

Rockafellar et al. konnten zeigen, dass unter beliebiger Wahl dieser Abweichungsmaße und unter bestimmten Annahmen an den Markt stets ein Marktgleichgewicht existiert. Es war sogar möglich eine Darstellung der optimalen Portfolios im Gleichgewicht zu bestimmen. In dieser Arbeit haben wir die Ausführungen und Beweise der Autoren detailliert nachvollzogen und anhand eines selbst konstruierten Beispiels verdeutlicht sowie interpretiert. Dabei haben wir in Abweichung zum entsprechenden Artikel zunächst die Optimierungsprobleme für einen einzelnen Investor betrachtet und noch benötigtes Vorwissen, beispielsweise aus der Optimierung und konvexen Analysis sowie zu Abweichungs- und Risikomaßen, zusammengetragen. Außerdem haben wir das betrachtete Problem als Spiel in Normalform modelliert und festgestellt, dass sich der Begriff des Marktgleichgewichts mit dem eines Nash-Gleichgewichts vereinbaren lässt.

Anknüpfend an diese Ausarbeitungen bleibt noch offen, wie sich die Frage nach der Existenz von Gleichgewichten beantworten lässt, wenn wir Leerverkäufe in den riskanten Assets zulassen, also wenn sich die Investoren in den riskanten Assets verschulden dürfen. Das wird beispielsweise bei Rockafellar et al. in [17] untersucht. Außerdem haben wir uns hier auf einen Finanzmarkt mit zwei Zeitpunkten beschränkt. Man kann sich fragen, was bei einem Preisprozess über mehrere Perioden passiert. Aus spieltheoretischer Sicht bleibt eine Verbindung zu gemischten

Strategien offen. Diese werden den hier verwendeten reinen Strategien in der Theorie vorgezogen. Es stellt sich die Frage, ob sich die Darstellung von gemischten Strategien, in denen ein Spieler ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Aktionenmenge statt einer konkreten Aktion wählt, sinnvoll auf Finanzmärkte übertragen lässt.

A. Anhang

A.1. Optimierung

Wir stellen kurz grundlegende Definitionen und Eigenschaften der konvexen Analysis aus der Arbeit (solange nichts anderes erwähnt wird) [15] zusammen, da unsere Zielfunktionen bei den Optimierungsaufgaben konvex oder konkav sind. Wir bezeichnen mit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ die erweiterte reelle Zahlengerade. Jede bezüglich $\mathbb{R}$ offene Menge ist auch bezüglich $\overline{\mathbb{R}}$ offen. Funktionen $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ werden numerisch genannt.

Definition A.1 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge.*

(a) *Eine Funktion $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt konvex, falls*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

für jedes $\lambda \in [0, 1]$ und für alle $x, y \in M$ gilt, für die die rechte Seite wohldefiniert ist.

(b) *$f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt strikt konvex, falls für alle $\lambda \in (0, 1)$ und alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ und $f(x) < \infty$ sowie $f(y) < \infty$*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

gilt.

(c) *f heißt (streng) konkav, falls die Funktion $g(x) := -f(x)$ (streng) konvex ist.*

Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{Dom}(f) := \{x \in M | f(x) < \infty\}$$

den effektiven Definitionsbereich einer konvexen Funktion $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$. Wir nennen

$$\mathrm{Epi}\, f := \{(x, \alpha) | x \in M,\ \alpha \in \mathbb{R},\ f(x) \leq \alpha\}$$

den Epigraphen von f.

Lemma A.2 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge.*

(i) *Ist $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ eine konvexe Funktion, so sind die Niveaumengen*

$$N_f(\alpha) := \{x \in M | f(x) \leq \alpha\}$$

für beliebiges $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ konvex.

(ii) *$f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann konvex, wenn ihr Epigraph* $\operatorname{Epi} f$ *eine konvexe Teilmenge von $M \times \mathbb{R}$ ist.*

Neben der Konvexität und Konkavität von Funktionen wird eine schwächere Version der Stetigkeit benötigt.

Definition A.3 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge.*

(a) *Eine Abbildung $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt unterhalbstetig, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ mit $x_n \to x \in M$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \inf f(x_n) \geq f(x).$$

(b) *Eine Abbildung $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt oberhalbstetig, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ mit $x_n \to x \in M$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup f(x_n) \leq f(x).$$

Hinsichtlich des Wertebereichs numerischer Funktionen definieren wir noch eigentliche Funktionen.

Definition A.4 *Eine konkave Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ heißt eigentlich, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$: $f(x) < +\infty$ und für wenigstens ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$: $f(x_0) > -\infty$ gelten.*

Die folgenden Zusammenhänge stammen, falls nicht anders erwähnt, aus [8] und werden auch dort bewiesen. Hinsichtlich der Existenz von Extrempunkten halten wir zunächst folgenden Satz fest, siehe etwa [8, Satz 1.1 und Folgerung].

Satz A.5 *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine unterhalbstetige Funktion auf der nichtleeren Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$.*

(a) *Ist X kompakt, so existiert $\min\limits_X f$. (Verallgemeinerter Satz von Weierstraß)*

(b) *Existiert ein* $\alpha \in \mathbb{R}$, *sodass* $N_f(\alpha)$ *beschränkt ist, so existiert* $\min\limits_X f$.

Für den Nachweis der Eigenschaften spezieller mengenwertiger Abbildungen in dieser Arbeit sind besondere Kegel relevant.

Definition A.6

(a) *Sei* $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$. *Dann heißt* K *Kegel, falls für alle* $x \in K$ *und alle* $\lambda \geq 0$ *gilt:* $\lambda x \in K$.

(b) *Sei* $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvex. Dann heißt* $v \in \mathbb{R}^n$ *Rezessionsrichtung von* M, *falls für alle* $x \in M$ *und alle* $\lambda \geq 0$ *gilt:* $x + \lambda v \in M$. *Die Menge* R_M *aller Rezessionsrichtungen heißt Rezessionskegel.*

Es gilt folgender Charakterisierung von konvexen Kegeln, vergleiche etwa [8, Lemma 2.4] :

Lemma A.7 *Eine nichtleere Menge* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann ein konvexer Kegel, wenn für alle* $x, y \in K$ *und alle* $\lambda, \mu \geq 0$ *gilt:* $\lambda x + \mu y \in K$.

Wir halten an der Stelle noch zwei benötigte Eigenschaften von Rezessionskegeln fest, siehe etwa [8, Satz 2.14].

Satz A.8 *Seien* $\emptyset \neq M, N \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvexe, abgeschlossene und disjunkte Mengen. Dann gilt:*

(i) *Der Rezessionskegel* R_M *ist ein konvexer, abgeschlossener Kegel.*

(ii) $v \in R_M \Longleftrightarrow$ *Es existiert ein* $x \in M$, *sodass für alle* $\lambda \geq 0$ *gilt:* $x + \lambda v \in M$.

Es lässt sich zeigen, dass konvexe Funktionen auf offenen konvexe Mengen lokal Lipschitz-stetig sind (vergleiche etwa [8, Satz 2.17]). Daraus ergibt sich der folgende wichtige Satz:

Satz A.9 (Stetigkeit einer konvexen Funktion) *Sei* $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine konvexe Menge und* $f : M \to \mathbb{R}$ *eine konvexe Funktion. Dann ist* f *auf* $int(M)$ *stetig.*

Über die Beschränktheit der Niveaumengen einer konvexen Funktion trifft folgender Satz eine Aussage, siehe etwa [8, Satz 2.18]:

Satz A.10 (Lemma von Fenchel) *Sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konvex und es existiere ein* $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ *mit* $N_{\alpha_0}(f) \neq \emptyset$ *und beschränkt. Dann sind alle Niveaumengen beschränkt.*

Wir benötigen noch abschließend folgende Darstellung von Rezessionskegeln, siehe etwa Rockafellar [15, Theorem 8.2]:

Satz A.11 *Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen und konvex. Dann ist*

$$R_C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \exists \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C, \exists \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+ : x = \lim_{k\to\infty} \lambda_k x_k \textit{ und } \lambda_k \downarrow 0 \right\}.$$

Weiterhin gilt mit $K := \operatorname{cone}\{(1,x)|x \in C\}$

$$\overline{K} = K \cup \{(0,x)|x \in R_C\}.$$

A.2. Wahrscheinlichkeitstheorie

In diesem Abschnitt halten wir die benötigten Begrifflichkeiten und Eigenschaften über Zufallsvariablen, Erwartungswert und Varianz fest. Diese sind zusammengetragen aus [9]. Wir legen einen festen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einem nichtleeren Grundmenge Ω, einer σ-Algebra $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} : \Omega \to [0,1]$ zu Grunde. Reelle Zufallsvariablen sind messbare Abbildungen $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Alle (Un-)Gleichungen zwischen Zufallsvariablen werden als $\mathbb{P}$-fast-sicher verstanden, d.h. es gibt eine Nullmenge $N \in \mathcal{F}$, sodass die Aussage für alle $\omega \in \Omega \backslash N$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ den Raum der Zufallsvariablen X, für die der Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = \int\limits_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

und die Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) = \int\limits_{\Omega} [X(\omega) - \mathbb{E}(X)]^2 d\mathbb{P}(\omega)$$

wohldefiniert sind. Dabei heißt σ Standardabweichung von X. Die zugehörige Norm, die im folgenden für Zufallsvariablen stets angenommen wird, ist gegeben durch

$$\|X\| = (\mathbb{E}[X^2])^{\frac{1}{2}}.$$

Aus den Rechenregeln des Integrals folgen die nachstehenden Eigenschaften des Erwartungswertes.

Lemma A.12 *Seien $X, Y \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ reelle Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(i) $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$ *(Linearität)*

(ii) $X \leq Y \Longrightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ *(Monotonie)*

Die Konvergenz einer Folge von Zufallsvariablen wird wie folgt erklärt:

Definition A.13 $(X_k) \subset \mathfrak{L}^2(\Omega)$ *konvergiert gegen* $X \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$*, falls gilt:*

$$\|X - X_k\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wir schreiben dann $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = X$ *bzw.* $X_k \to X$ *für* $k \to \infty$*.*

A.3. Diskrete Finanzmärkte

Wir fassen die benötigten Begriffe aus der diskreten Finanzmathematik zusammen, vergleiche etwa [7]. Wir betrachten ein Einperiodenmodell unter Unsicherheit. Es gibt zwei Zeitpunkte $t = 0$ und $t = T$ derart, dass in $t = 0$ der Handel von Wertpapieren, sogenannten Assets, stattfindet und in $t = T$ die Auszahlung der Wertpapiere. Die einzige Möglichkeit, Geld von $t = 0$ nach T zu transferieren, besteht im Handel von Wertpapieren. Die Auszahlung im zukünftigen Zeitpunkt T kann dabei ungewiss sein und von einem eintretenden Zustand abhängen. Man denke beispielsweise an Aktienkurse. Wir bezeichnen daher mit

$$\Omega = \{\omega_k, k \in \{1, ..., K\}\}$$

die (endliche) Menge aller Zustände, die im Zeitpunkt T mit positiver Wahrscheinlichkeit eintreten können.
Es gibt endlich viele Assets $j = 0, 1, ..., n$ und es ist $|\Omega| = K < \infty$. Wir identifizieren eine Zufallsvariable $X_j : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ mit einem Vektor $\mathbb{X}_j \in \mathbb{R}^K$ durch die Festlegung $\mathbb{X}_j^k = X_j(\omega_k), 1 \leq k \leq K$.

Definition A.14

(i) *Der Vektor $S = (s_0, s_1, ..., s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ heißt Preisvektor, wobei $s_j > 0$ für $j = 0, 1, ..., n$ die Geldmenge beschreibt, die ein Investor zum Erwerb einer Einheit des Wertpapiers j zahlen muss.*

(ii) *Die Auszahlung eines Wertpapiers $j \in \{0, 1, ..., n\}$ im Zeitpunkt $t = T$ ist gegeben durch die Zufallsvariable*

$$X_j = s_j(1 + R_j) \in \mathfrak{L}^2(\Omega),$$

wobei $R_j \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ die Rendite des Wertpapiers j bezeichnet. $X_j(\omega_k) \in \mathbb{R}$ ist die Auszahlung des Assets j im Zustand $\omega_k, k \in \{1, ..., K\}$ zum Zeitpunkt T.

(iii) *Die Rendite $R_j \in \mathfrak{L}^2(\Omega)$ heißt sicher, falls $R_j =$ konst. ist. Dann nennt man das Asset j risikolos. Andernfalls heißt sie unsichere oder risikobehaftete Rendite und das Asset j riskant.*

(iv) *Die Auszahlungsmatrix* $D \in \mathbb{R}^{K\times(n+1)}$ *wird durch* $d_{k,j} := X_j(\omega_k)$ *definiert als*

$$D = \begin{pmatrix} X_0(\omega_1) & X_1(\omega_1) & \dots & X_n(\omega_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_0(\omega_K) & X_1(\omega_K) & \dots & X_n(\omega_K) \end{pmatrix}$$

Ein Euro, der heute in das Finanzinstrument j investiert wird, erbringt $(1 + R_j)$ Euro und damit einen Gewinn von R_j Euro in $t = T$.
Jedes Wertpapier ist vollständig beschrieben durch seine Auszahlung in den Zuständen $\omega_k \in \Omega$ in $t = T$. In unserem Modell entscheidet ein Investor im Zeitpunkt $t = 0$, wie viele Einheiten eines Wertpapiers er erwerben will, anders gesagt, wie viel Geld er in welches Asset investieren will, oder wie viele Einheiten er von einem Wertpapier verkaufen will. Dadurch bildet er ein sogenanntes Portfolio.

Definition A.15 *Die Position eines Investors wird als Portfolio bezeichnet und ist beschrieben durch einen Vektor* $(x_0, x) = (x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. *Dabei beschreibt* $x_j, j \in \{0, 1, ..., n\}$ *die Anzahl der Einheiten, die der Investor von Asset* j *besitzt.*

Man beachte, dass in dieser Definition zunächst durch $x_j \in \mathbb{R}$ insbesondere negative als auch nicht-ganzzahlige Positionen ermöglicht werden. Ersteres wird als Short-Position bezeichnet. Im Fall $x_j > 0$ spricht man von einer Long-Position. Wir definieren nun noch Preis und Auszahlung eines Portfolios.

Definition A.16

(i) *Der Preis eines Portfolios* $(x_0, x) = (x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *ist*

$$p = \sum_{j=0}^{n} s_j x_j.$$

$S = (s_0, s_1, ..., s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *heißt Preisvektor, wobei* s_j *der Preis einer Einheit des Assets* $j \in \{0, 1, ..., n\}$ *ist.*

(ii) *Die bedingte Auszahlung eines Portfolios* $(x_0, x) = (x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *ist gegeben durch die Zufallsvariable*

$$W = \sum_{j=0}^{n} s_j x_j (1 + R_j) \in \mathfrak{L}^2(\Omega),$$

wobei wir die Auszahlung des Portfolios im Zustand $\omega_k, k \in \{1, ..., K\}$ bezeichnen durch

$$W_k = W(\omega_k) = \sum_{j=0}^{n} s_j x_j (1 + R_j(\omega_k)).$$

(iii) *Das Portfolio $(x_0, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ heißt risikolos, falls für die zugehörige bedingte Auszahlung $W = konst.$ gilt.*

(iv) *Die bedingte Auszahlung W heißt erreichbar (gegeben D), falls ein Portfolio (x_0, x) existiert mit $W = D \cdot (x_0, x)^T$. Das Portfolio (x_0, x) heißt dann Replikationsportfolio für W.*

(v) *Der zufällige Gewinn eines Portfolios x ist gegeben durch die Zufallsvariable*

$$G = W - p = \sum_{j=0}^{n} s_j x_j R_j \in \mathfrak{L}^2(\Omega).$$

In unseren Untersuchungen liegt ein besonderes Modell zu Grunde:

Definition A.17 *Ein Modell mit Auszahlungsmatrix $D \in \mathbb{R}^{K \times (n+1)}$ heißt vollständig, falls jede bedingte Auszahlung erreichbar ist.*

Bemerkung A.18 *Der Rang einer Matrix stimmt mit der Dimension des Bildraums überein. Daher ist das Modell mit Auszahlungsmatrix D genau dann vollständig, wenn $Rank(D) = K$ gilt. Notwendigerweise muss also auch $(n+1) \geq K$ sein.*

Ein Markt wird beschrieben durch ein Paar (D, S) mit der Auszahlungsmatrix D und dem Preisvektor S in $t = 0$. Für eine Untersuchung von Gleichgewichten werden nur besondere Preissysteme zugelassen, nämlich jene, die keine Arbitrage zulassen.

Definition A.19 *Betrachte den Markt (D, S). Ein Portfolio $(x_0, x) = (x_0, x_1, ..., x_n)$ heißt Arbitrage(-möglichkeit), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $p \leq 0$,

(ii) $W_k = \left(D \cdot (x_0, x)^T\right)_k \geq 0$ *für* $k = 1, ..., K$,

(iii) *Es ist $p < 0$ oder es gibt ein $k \in \{1, ..., K\} : W_k > 0$.*

Der Markt heißt arbitragefrei, falls es keine Arbitragemöglichkeit gibt.

A.4. Spieltheorie

In diesem Abschnitt stellen wir die grundlegenden Begriffe für eine spieltheoretische Betrachtungsweise von Finanzmärkten zusammen, wobei wir uns an [18] orientieren.

Definition A.20 *Ein Spiel ist ein mathematisches Modell einer Konfliktsituation. Ein Spiel in Normalform ist ein Tripel* $\Gamma = (I, \{\mathfrak{X}_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I})$*, wobei*

- $I = \{1, 2, \dots, m\}$ *die Spielermenge*
- $\mathfrak{X}_i$ *die Aktionenmenge des Spielers* i
- $H_i : \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \cdots \times \mathfrak{X}_m \to \mathbb{R}$ *die Gewinnfunktion des Spielers* i

ist. Das m*-Tupel* $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \times \cdots \times \mathfrak{X}_m$ *heißt Situation.*

Jeder Spieler wählt unabhängig von den anderen und prinzipiell gleichzeitig eine seiner Aktionen $x_i \in \mathfrak{X}_i$, wodurch eine Situation $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ entsteht. Jeder Spieler weiß nur von seiner eigene Aktion und nicht von denen der restlichen $m-1$ Spieler, jedoch gehen alle Spieler davon aus, dass sich die restlichen optimale verhalten. Auf Grundlage dessen will jeder Spieler seine individuelle Gewinnfunktion maximieren.

Spiele werden nach der Anzahl der Spieler, Kooperationsmöglichkeiten, Endlichkeit der Aktionenmenge, Eigenschaften der Gewinnfunktionen und Vollständigkeit der Informationsmenge charakterisiert. In dieser Arbeit werden unendliche nichtkooperative m-Personen-Spiele mit konkaver Gewinnfunktion und vollständiger Informationsmenge betrachtet.

In unseren Untersuchungen geht es um die Bestimmung von Gleichgewichtskriterien. Das sind Situationen, in denen kein Spieler sich aus eigener Kraft verbessern kann.

Definition A.21 *Eine Situation* $x^* = (x_1^*, \dots, x_k^*, \dots, x_m^*)$ *heißt annehmbar für Spieler* $k \in I$*, falls gilt:*

$$H_k(x^*) = H_k(x_1^*, \dots, x_k^*, \dots, x_m^*) \geq H_k(x_1^*, \dots, x_k, \dots, x_m^*) \qquad \text{für alle } x^k \in \mathfrak{X}_k.$$

Eine für alle Spieler annehmbare Situation x^* heißt Nash-Gleichgewichtssituation oder auch kurz Nash-Gleichgewicht.

Für den Nachweis der Existenz von Gleichgewichtssituationen benötigen wir den Fixpunktsatz von Kakutani. Den Beweis findet man beispielsweise in [2].

Satz A.22 (Brouwerscher Fixpunktsatz)
Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und kompakt. Dann besitzt jede stetige Abbildung $f : M \to M$ einen Fixpunkt.

Satz A.23 (Fixpunktsatz von Kakutani)
Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und kompakt, $F : M \to \mathfrak{P}(M)$ eine mengenwertige Funktion mit abgeschlossenem Graphen $Gr(F) = \{(x, y) | y \in F(x)\}$. Für jedes $x \in M$ sei $F(x) \subseteq M$ nichtleer und konvex. Dann existiert ein $x \in M$ mit $x \in F(x)$.

B. Übersicht über die Annahmen

- Alle Abweichungsmaße $\mathfrak{D}_i$ sind unterhalbstetig und unterhalb dominiert.
- Der Preisvektor ist stets von der Gestalt $S = (1, s_1, \ldots, s_n)$. Wird ein gegebener Markt mit festem Preisvektor betrachtet, so ist, falls nichts anderes gesagt wird, $S > 0$.
- Für die riskanten Assets $j = 1, \ldots, n$ des Marktes gelten die folgenden Annahmen:

(A1) Die erwarteten Renditen $\mathbb{E}(R_j)$ für die risikobehafteten Assets j sind nicht identisch und es gilt $\mathbb{E}(R_j) > R_0$ für alle $j = 1, ..., n$.

(A2) Aus der Beziehung

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (1 + R_j) = C \text{ mit } \alpha_j \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$$

folgt stets $\alpha_j = 0$ für alle $j = 1, ..., n$ und damit $C = 0$.

(A2') Für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ ist kein Portfolio (x_{i0}, x_i) mit $x_i \neq 0$ risikofrei.

(A3) Keines der riskanten Assets ist irrelevant für den Markt (siehe Definition 3.1).

- Alle Nutzenfunktionen $U_i : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to [-\infty, \infty)$ erfüllen die folgenden Annahmen:

(U1) U_i ist konkav,

(U2) U_i ist im 1. Argument streng monoton wachsend,

(U3) U_i ist im 2. Argument nicht wachsend,

(U4) U_i ist oberhalbstetig

(U5) $\forall \mu \in \mathbb{R}, \forall \delta \in \left(0, \overline{\delta}_i\right] \; \exists \; t_1, t_2 > 0 : \; U_i(\mu + t_1, t_1 \cdot \delta) < U_i(\mu, 0) < U_i(\mu + t_2, t_2 \cdot \delta)$.

C. Symbolverzeichnis

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^n_+ &= \{x \in \mathbb{R}^n | x_j > 0 \text{ für alle } j = 1, \dots, n\} \\
\mathfrak{P}(M) &: \text{ Potenzmenge von } M \\
\overline{W} &:= \sum_{j=1}^{n} s_j x_j R_j \in \mathfrak{L}^2(\Omega) \\
f_{\mathfrak{D}}(x) &:= \mathfrak{D}(\overline{W}) \\
\delta^*(\Delta) &:= \inf\{f_{\mathfrak{D}}(x) | x \in B_{P(\Delta)}\} \\
X^*(\Delta) &:= \arg\min\{f_{\mathfrak{D}}(x) | x \in B_{P(\Delta)}\} \\
\overline{x} \in X^*(1) &: \text{ Basic Fonds} \\
\overline{\delta} &= \delta^*(1) = f_{\mathfrak{D}}(\overline{x}) \text{ Einfache Abweichung} \\
V(X) &:= U(\mathbb{E}(X), \mathfrak{D}(X)) \\
u(t) &:= U(\mu + t, t \cdot \delta) \text{ mit } \mu \in \mathbb{R},\ \delta \in [0, \infty) \\
w(S) &:= x_0^0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j^0 = x_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j \\
W := W(x_0, x) &= x_0(1 + R_0) + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j (1 + R_j) \\
M(S) &:= \left\{ \Delta^* \in \mathbb{R} \middle| \Delta^* \in \arg\max_{\Delta \geq 0} U(w(S)(1 + R_0) + \Delta, \Delta \cdot \overline{d}) \right\} \\
a_j &:= \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^0 \text{ für } j = 1, \dots, n \\
f_{ij} &:= \frac{x_{ij}}{a_j} \geq 0 \text{ für } j = 1, \dots, n \\
\Delta &:= (\Delta_1, \dots, \Delta_m), \qquad \Delta^* := (\Delta_1^*, \dots, \Delta_m^*), \\
\overline{z} &:= (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_m), \qquad Z^*(1) := Z_1^*(1) \times \dots \times Z_m^*(1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{i,\overline{z}} &:= \left(\sum_{j=1}^{n} f_{ij} \cdot \overline{z}_{1j} \ , \dots \ , \ \sum_{j=1}^{n} f_{ij} \cdot \overline{z}_{mj} \right) \\
\overline{U}_{i,\overline{z}}(\Delta^*, \Delta_i) &:= U_i \left((x_{i0} + \Delta^* a_{i,\overline{z}}^T)(1 + R_0) + \Delta_i, \ \Delta_i \cdot \overline{d}_i \right) \\
\overline{M}_{i,\overline{z}}(\Delta^*) &:= \left\{ \Delta_i'^* \middle| \Delta_i'^* \in \arg\max_{\Delta_i \geq 0} \overline{U}_{i,\overline{z}}(\Delta^*, \Delta_i) \right\} \\
\mathcal{M}_{\overline{z}}(\Delta^*) &:= \{\Delta | \Delta_i \in \overline{M}_{i,\overline{z}}(\Delta^*) \text{ für } i = 1, ..., m\}.
\end{aligned}
$$

D. Liste der Optimierungsprobleme

Für jeden Investor können folgende Probleme zur Bestimmung eines gemischten Portfolios $(x_0, x) = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ mit riskanten Portfolioanteil x beziehungsweise $z = (z_1, \ldots, z_n)$ mit $z_j = s_j x_j$ für $j = 1, \ldots, n$ betrachtet werden:

$$P(\Delta) : f_{\mathfrak{D}}(x) := \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} s_j x_j R_j\right) \to \min!$$

$$B_{P(\Delta)} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} s_j x_j (\mathbb{E}(R_j) - R_0) \geq \Delta, \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, ..., n. \end{cases}$$

Budgetbedingung an (x_0, x): $x_0 + \sum_{j=1}^{n} s_j x_j = 1.$

$$\mathcal{P}(\Delta) : \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j R_j\right) \to \min!$$

$$B_{\mathcal{P}(\Delta)} \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} z_j (\mathbb{E}(R_j) - R_0) \geq \Delta, \\ z_j \geq 0 \quad \forall j = 1, ..., n. \end{cases}$$

$$\overline{P}(S) : \qquad U(\mathbb{E}(W), \mathfrak{D}(W)) \to \max!$$

$$B_{\overline{P}(S)} \begin{cases} x_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} s_j x_j = w(S), \\ x_j \geq 0, \forall j = 1, ..., n. \end{cases}$$

$$\overline{P}(S): \quad U\left(w(S)(1+R_0)+\sum_{j=1}^{n} s_j x_j(\mathbb{E}(R_j)-R_0), \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} s_j x_j R_j\right)\right) \to \max_{x\geq 0}!$$

Selbstfinanzierungsbedingung: $x_0 = w(S) - \sum_{j=1}^{n} s_j x_j$

$$\overline{P}'(S): U\left(w(S)(1+R_0)+\sum_{j=1}^{n} z_j(\mathbb{E}(R_j)-R_0), \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j R_j\right)\right) \to \max_{z\geq 0}!$$

$$\overline{P}''(S): \quad U\left(w(S)(1+R_0)+\Delta, \mathfrak{D}\left(\sum_{j=1}^{n} z_j R_j\right)\right) \to \max_{(\Delta,z)}!$$

$$B_{\overline{P}''(S)}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} z_j(\mathbb{E}(R_j)-R_0) \geq \Delta, \\ z \geq 0, \\ \Delta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Literaturverzeichnis

[1] Barbu, V. ; Precupanu, T.: *Convexity and Optimization in Banach Spaces*. Springer Monographs in Mathematics, S. 67 ff., 2012.

[2] Bergner, M.: *Nichtlineare Funktionalanalysis*. Vorlesungsskript, 2008.

[3] Bönsch, A.: *Duale Charakterisierung von Risiko- und Abweichungsmaßen mit Anwendung in der Portfolio-Optimierung*. Diplomarbeit, Leipzig, 2011.

[4] Capiński, M; Zastawniak, T.: *Mathematics for Finance*. Springer Undergraduate Mathematics Series, 2011.

[5] Filipović, D. ; Kupper, M.: *Equilibrium Prices for Monetary Utility Functions*. University of Munich, 2006.

[6] Föllmer; Schied: *Stochastic Finance*. De Gruyter, 2011.

[7] Frey, R.; Schmidt, T.: *Finanzmathematik 1*. Vorlesungsskript, 2008.

[8] Kripfganz, A.: *Optimierung 2*. Vorlesungsskript, 2012.

[9] Meintrup, D.; Schäffler, S.: *Stochastik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[10] Mossin, J.: *Equilibrium in a capital asset market*. Econometrica 34, S. 768-783, 1966.

[11] Rockafellar, R. T. et al.: *Equilibrium with investors using a diversity of deviation measures*. J. Bank Finance, 2007.

[12] Rockafellar, R. T. et al.: *Deviation measures in risk analysis and optimization*. Research report #2002-7 University of Florida, 2002.

[13] Rockafellar, R. T. et al.: *Generalized Deviations in Risk Analysis*. Finance and Stochastic manuscript No.10, 2006.

[14] Rockafellar, R. T. et al.: *Master Funds in Portfolio Analysis with General Deviation Measures*. 2004.

[15] Rockafellar, R. T.; Wets, R. J.-B.: *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[16] Rockafellar, R. T.; Wets, R. J.-B.: *Variational Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[17] Rockafellar, R. T.; Jofré, A.; Wets, R. J.-B.: *Convex Analysis and Financial Equilibrium*. Mathematical Programming B 148, 223-240, 2014.

[18] Voigt, H.: *Spieltheorie*. Vorlesungsskript, 2014.

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Ort Datum Unterschrift